Chapitre 1 : Introduction, Rappel mathématique (2 semaines)
Calcul vectoriel, calcul tensoriel.

Chapitre. I. Introduction et rappel mathématique

I.1. Introduction

Rappelons qu'en mécanique du solide les grandeurs de base sont les forces et les déplacements, qui permettent de calculer directement des énergies. En mécanique des milieux continus, il est de même, mais on travaille avec des grandeurs normalisées. Pour simplifier disons que les contraintes sont des forces par unité de surface et les déformations sont des variations de longueurs par unité de longueur.

On definit l'elasticite par: Mécanique des corps solides déformables (par opposition à la mécanique du point ou des corps indéformables).

La mécanique étudie la réponse d'un corps solide à des forces ou moments appliques.

On note que pour les milieux visco-elastiques, on parle aussi de rhéologie : leur réponse à des forces / moments / pressions appliquées);

Forces ou moments (contraintes) qui s'exercent sur un objet fait d'un matériau donne, de forme donnée et de volume donne →translation, rotation, déformation (changement de forme et de volume).

La mécanique du point ou du solide indéformable étudié la translation et la rotation, l'élasticité s'intéresse exclusivement à la déformation.

I.2. Le but de l'élasticité

- **Stabilité des structures mécaniques**

1- Pour la construction de ponts, routes, structures en béton (immeubles ...) → forme d'un profilé, taille maximale d'un immeuble, ... ,
2-Fibres, tissus synthétiques, ... (peau (artificielle ?))

- **La géométrie est importante.**

1-Exemple des poutres profilées utilisées dans le bâtiment,
2-Exemple du caoutchouc = un élastomère préparé en tubes, en rubans, en fines pellicules (vernis, sols), en câbles, en tissus, ...

- **Fluides viscoélastiques : modification de la rhéologie des matériaux complexes par rapport à celle des fluides simples**

1-Solutions de polymères, gels, caoutchoucs, pâtes, poudres, sables, cristaux liquides, **[1]**

I.3. Rappels mathématiques [2]

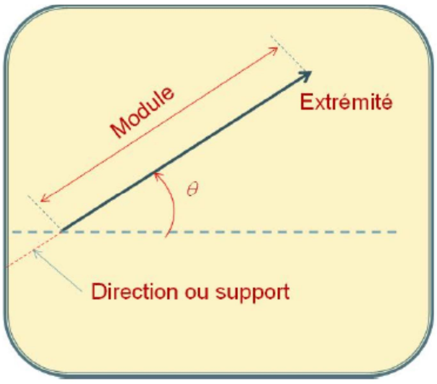
I.3. 1.Calcul vectoriel

Dans le cadre de ce chapitre, nous allons rapporter quelques notions de bases liées au calcul vectoriel. La maitrise de ces techniques est nécessaire pour l'assimilation de la mécanique.

I.3.1.1. Scalaire et vecteur

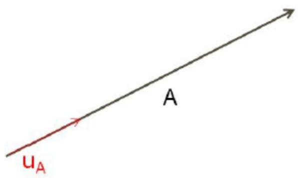
Un scalaire est une grandeur totalement définie par un nombre est une unité. (temps, température, masse, énergie, volume, ⋯ etc)

Un vecteur est une entité mathématique définie par une origine, une direction, un sens et une intensité :



- **L'origine :** le point d'application
- **La direction :** la droite qui porte le vecteur. Elle est définie par l'angle θ mesuré entre un axe de référence et le support.
- **Le sens** représente l'orientation origine-extrémité du vecteur et est symbolisé par une flèche.
- **L'intensité, norme ou module,** représente la valeur de la grandeur mesurée par le vecteur.

Notion de vecteur unitaire: A chaque vecteur on peut associer un vecteur unitaire qui a la même direction et de norme égale à 1. On obtient le vecteur unitaire en divisant le vecteur initial par son module :



4 $\|\vec{u}\| = \dfrac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$

Notion de vecteur lié et vecteur glissant :

a) les **vecteurs liés** sont notés $\overrightarrow{v(A)}$ **l'origine A est fixé ;**

b) Si le **point d'application se déplace** sur la droite, le vecteur est dit **vecteur glissant.**

I.3.1.2. Repère de l'espace affine:

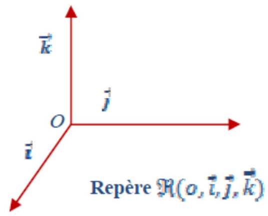
E Désigne l'espace affine réel de dimension 3. Les éléments de E sont des points que l'on note : A, B, M, N, ⋯etc. D'autre part **Ɛ** désigne l'espace vectoriel attaché à E, ses éléments $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{AB}$, ... etc

Nous considérons comme acquises les notions de repère affine de E associé à l'espace vectoriel **Ɛ**. Un tel repère sera noté **R** $(O, \vec{e}1, \overrightarrow{e2}, \overrightarrow{e3})$ ou O est un point de l'espace affine E pris comme origine et e= $(\overrightarrow{e1}, \overrightarrow{e2}, \overrightarrow{e3})$ est une base de l'espace des vecteurs libres. (un vecteur libre est un vecteur qui définit une direction dans l'espace

$$\forall \vec{u} \in \mathcal{E} \ \exists\ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \text{ tel que } \vec{u} = x\,\overrightarrow{e1} + y\overrightarrow{e2} + z\overrightarrow{e3}$$

Représentation du repère R $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ **de l'espace affine [2].**

Ce repère est une base orthogonale : les vecteurs libres de la base portés dans l'espace à partir de l'origine O du repère forment un trièdre trirectangulaire direct.



I.4. Opérations sur les vecteurs

Soit $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$et $\overrightarrow{OC}$ trois vecteurs de l'espace vectoriel **ε**. Avec :

$\overrightarrow{OA} = x_A\,\vec{\imath} + y_A\,\vec{j} + z_A\vec{k}$

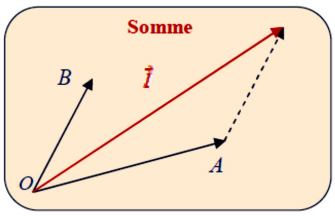
$\overrightarrow{OB} = x_B\,\vec{\imath} + y_B\,\vec{j} + z_B\vec{k}$

$\overrightarrow{OC} = x_C\,\vec{\imath} + y_C\,\vec{j} + z_C\vec{k}$

I.4.1. Somme et multiplication par un scalaire [2].

- **La somme de deux vecteurs :**

5

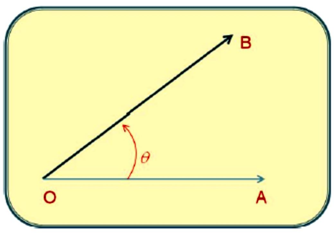


$\vec{I} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (x_A + x_B)\,\vec{\imath} + (y_A + y_B)\,\vec{j} + (z_A + z_B)\vec{k}$

- **La multiplication par un scalaire :**
  $\forall \vec{u} \in$ **R,** existe μ tel que $u\ \overrightarrow{OA} = \mu\, x_A\,\vec{\imath} + \mu\, y_A\,\vec{j} + \mu\, z_A\,\vec{k}$

I.4.2. Produit scalaire

- **Le produit scalaire** de deux vecteurs non nuls représentés par les bipoints OA et OB **est le nombre réel** $OA.OB.cos(\theta)$ si l'angle θ désigne celui de AOB. Si l'un des vecteurs est nul alors le produit scalaire est nul.
  Dans le cas où aucun des vecteurs n'est nul, cette définition prend la forme suivante :



$\overrightarrow{OA} x \overrightarrow{OB} = OAxOBx\ Cos\,\theta$

- **Propriétés du produit scalaire :**

1) Commutativité :
Le produit scalaire est commutatif :

$\overrightarrow{OA}x\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB}x\overrightarrow{OA}$ Jusitification Cos θ = Cos (− θ)

2) Distributivité par rapport à l'addition :
Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition :

$$\overrightarrow{OA}x(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA}x\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}x\overrightarrow{OC}$$

3) Conséquence :

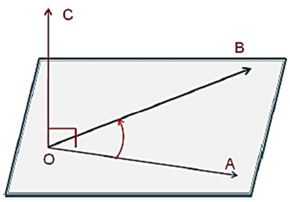
Si $\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ alors $\overrightarrow{OA}\,\boldsymbol{x}\,\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$

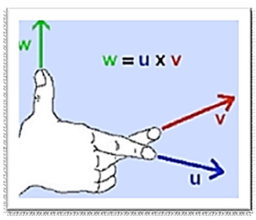
Le produit scalaire nous permet donc de déduire la perpendicularité géométrique lorsqu'il est de valeur nulle.
4) Expression analytique :

$$\overrightarrow{OA}\,\boldsymbol{x}\,\overrightarrow{OB} = x_A\, x_B + y_A\, y_B + z_A\, z_B$$

I.4.3. Produit vectoriel [2].

Le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls représentés par les bipoints OA et OB est le vecteur représenté par le bipoint OC avec :
- **Un module** égale à $OA.OB.\sin(\theta)$
- **Une direction** perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs OA et OB
- **Un sens** défini par la règle de la main droite ou de la progression du tire-bouchon qui envoi $\overrightarrow{OA}$ sur $\overrightarrow{OB}$. **On note**





$$\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\| = OA\,.\,OB.\,\mathrm{Sin}\,\theta$$

- **Propriétés du produit vectoriel :**

1) Commutativité :
Le produit vectoriel est **anti**commutatif :

$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OA}$ Justification Sin θ = − Sin (−θ)

2) Distributivité par rapport à l'addition :
Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition :

$$\overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC}$$

3) Interprétation géométrique du produit vectoriel :

Le module de $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ est donné par $OA.\,OB.$ Sin θ qui représente l'aire (surface) du parallélogramme construit sur les deux vecteurs.

4) Conséquence :

Si $\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ alors $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} // \overrightarrow{OB}$

5) Expression analytique :

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (y_A z_B - z_A y_B) & \vec{i} \\ -(x_A z_B - z_A x_B) & \vec{j} \\ (x_A y_B - y_A x_B) & \vec{k} \end{vmatrix}$$

I.4.4. Produit mixte [2].
Le produit mixte de trois vecteurs non nuls représentés par les bipoints OA et OB et OC est un scalaire ; Il est le déterminant de ces trois vecteurs dans une base orthonormale directe quelconque.
On note: $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}] = \overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC})$

- **Propriétés du produit mixte :**
  $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}] = \overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OC}.(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OB}.(\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA})$

- **Interprétation géométrique du produit vectoriel :**

- **Expression analytique :**

$$\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ z_A & z_B & z_C \end{vmatrix}$$

I.4.5 Double produit vectoriel [2].
Le double produit vectoriel peut être calculé à l'aide de la relation suivante :

$\overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}).\overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}).\overrightarrow{OC}$

I.4.6 Dérivation vectorielle
Soient M(x(t), y(t), z(t)) du repère R (O, xyz) on a :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

Par définition:

$$\frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} = (dx/dt)\,\vec{i} + (dy/dt)\,\vec{j} + (dz/dt)\,\vec{k}$$

Que l'on note aussi :

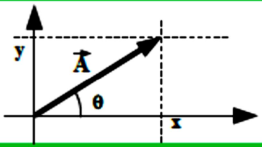
$$\frac{d(\vec{M})}{dt}$$

Propriétés:

- $\frac{d}{dt}(\vec{u}+\vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt}+\frac{d\vec{v}}{dt}$ $\qquad$ $\frac{d}{dt}(\vec{u}.\vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt}.\vec{v}+\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{u}$
- $\frac{d}{dt}(\vec{u}\wedge\vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\frac{d\vec{v}}{dt}$ $\qquad$ $\frac{d}{dt}[\lambda(t)\vec{u}(t)] = \frac{d\lambda}{dt}\vec{u}+\lambda\frac{d\vec{u}}{dt}$

FORMULAIRE : CALCUL VECTORIEL DE BASE

Projection des vecteurs



$\vec{A}=x\vec{i}+y\vec{j}$, $\|\vec{A}\|=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad \begin{cases} x=\|\vec{A}\|\cos\theta \\ y=\|\vec{A}\|\sin\theta \end{cases}$ et $\tan\theta=\frac{y}{x}$

Produit scalaire et produit vectoriel

8

	Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$	Produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$
Définition	$\vec{A}.\vec{B}$ (est un nombre réel)	$\vec{A}\wedge\vec{B}$ (est un vecteur)
Expression en fonction de la norme	$\vec{A}.\vec{B}=\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}})$	$\|\vec{A}\wedge\vec{B}\|=\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\sin(\widehat{\vec{A},\vec{B}})$
En fonction des coordonnées	$\vec{A}.\vec{B}=x_Ax_B+y_Ay_B+z_Az_B$	$\vec{A}\wedge\vec{B}=(y_Az_B-z_Ay_B, z_Ax_B-x_Az_B, x_Ay_B-y_Az_B)$
Commutation	$\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$	$\vec{A}\wedge\vec{B}=-\vec{B}\wedge\vec{A}$
Produit nul et conséquences	$\vec{A}.\vec{B}=0$ ssi : $\vec{A}$ ou $\vec{B}$ sont nuls ou bien $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont **orthogonaux**	$\vec{A}\wedge\vec{B}=\vec{0}$ ssi : $\vec{A}$ ou $\vec{B}$ sont nuls ou bien $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont **colinéaires**
Associativité	$(\vec{A}.\vec{B})\vec{C}\neq\vec{A}(\vec{B}.\vec{C})$	$(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C}\neq\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})$
	$\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})=(\vec{A}.\vec{B})\wedge\vec{C}$ appelé produit mixte des trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$	