Chapitre 2: Tenseur des contraintes (4 semaines)
Coupure, facette et vecteur contrainte, Formule de Cauchy, tenseur des contraintes, Equations d’équilibre, Contraintes principales et directions principales, Invariants scalaires du tenseur des contraintes, Tenseur sphérique et déviateur.

Chapitre II: Tenseur des contraintes

II.1. Présentation [3]:

La **théorie de l'élasticité** étudie les **déplacements**, les **déformations** et les **contraintes** dans un solide soumis à des forces extérieures.
Nous adopterons les hypothèses suivantes :

- Le **matériau** est **homogène** (il a les mêmes propriétés en tout point) et **isotrope** (en un point donné, il a les mêmes propriétés dans toutes les directions).
- Le comportement du matériau est **linéaire** (les relations entre les contraintes et les d´déformations sont linéaires) et **élastique** (le solide reprend sa forme initiale d`es que les forces appliquées sont supprimées).

Le repère *{O; x, y, z}* est un repère orthonormé direct ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont les vecteurs unitaires des axes **(figure II.1.).**

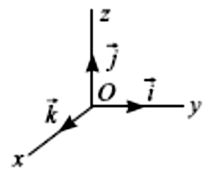


Figure II.1. Repère orthonormé {O; x, y, z} et vecteurs unitaires { $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ }

II.2. Contraintes autour d’un point [3].

II.2. 1. Coupure, facette et vecteur contrainte

En chaque point M d'un solide, il existe des forces intérieures que l'on met en évidence en effectuant une **coupure** du solide, par une surface *S*, en deux parties *A* et *B* **(figure II.2).**

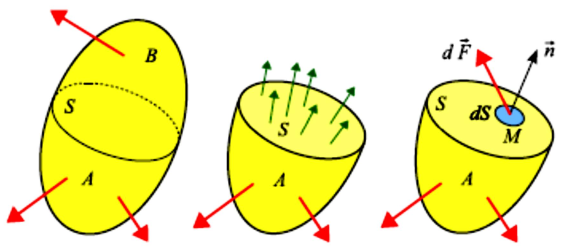


Figure II.2. – Coupure et facette $\vec{n}$ en M

La partie ***A***, par exemple, est en équilibre sous l’action des forces extérieures qui lui sont directement appliquées et des forces intérieures reparties sur la coupure.

Considérons un point *M* de *S*. Soit *dS* un élément infinitésimal de la surface *S* entourant *M* et $\vec{n}$ le vecteur unitaire, perpendiculaire en *M* 0 à *S* et dirigé vers l’extérieur de la partie *A*. Nous appellerons cet ensemble **facette** $\vec{n}$ en *M*.

Soit $d\vec{F}$ la force qui s'exerce sur cette facette. On appelle **vecteur contrainte sur la facette** $\vec{n}$ **en** M, la quantité :

$$\vec{T}\,(M, \vec{n}\,) = d\vec{F}/dS$$

Remarque : une contrainte s'exprime en pascal (1 Pa = 1 N/m^2) ; dans la pratique, on utilise souvent le mégapascal (1 MPa = 10^6 Pa = 1 N/mm^2).

Considérons, en un point M, le cylindre infiniment petit d'axe $\vec{n}$, de hauteur h et de section dS **(figure II. 3.).**

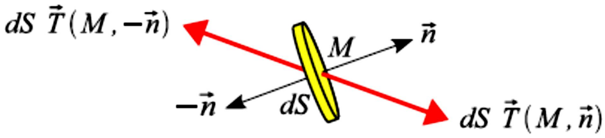


Figure II. 3. Efforts sur les facettes $\vec{n}$, $et - \vec{n}$,

Quand h tend vers 0, le cylindre est en équilibre sous l'action des forces $dS\,\vec{T}\,(M, \vec{n}\,)$ et $dS\,\vec{T}\,(M, \text{-}\,\vec{n}\,)$ d'où :

$$\vec{T}\,(M, \vec{n}\,) = - \vec{T}\,(M, \vec{n}\,)$$

II.2.2. Contrainte normale et contrainte tangentielle [3].

Le vecteur contrainte peut être décomposé en sa composante suivant $\vec{n}$ et sa projection sur la facette **(figure II.4)** :

$$\vec{T}\,(M, \vec{n}\,) = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_n$$

Avec: $\sigma_n = \vec{n}\ .\ \vec{T}\,(M, \vec{n}\,)$

σ_n est la **contrainte normale** et $\vec{\tau}_n$ est le **vecteur cisaillement** ou **contrainte tangentielle.** σ_n est une valeur algébrique positive (traction) ou négative (compression).

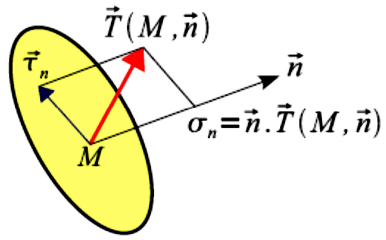


Figure II.4. Vecteur contrainte sur la facette $\vec{n}$ en M.

Remarque : on a la relation (théorème de Pythagore) :

$$\|\vec{T}\,\|^2 = \sigma_n{}^2 + \|\vec{\tau}_n\|^2$$

II.2.3. Formule de Cauchy : tenseur des contraintes [3].

Soit le tétraèdre infiniment petit $MABC$ construit sur les axes x, y et z (**figure II. 5**). Soient $\vec{n}$ de composantes (n_x, n_y, n_z) la normale unitaire au plan ABC dirigée vers l'extérieur du tétraèdre et dS l'aire du triangle ABC.

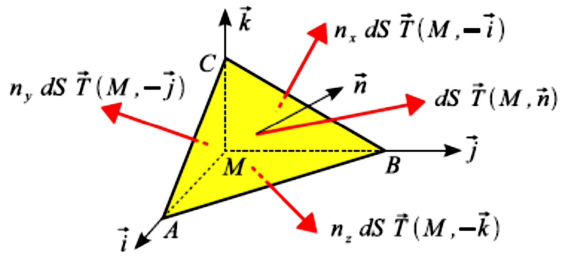


Figure II.5. Equilibre du tétraèdre **(Cauchy)**

On a:

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2dS\,\vec{n} = 2dS\, n_x\,\vec{\imath} + 2dS\, n_y\,\vec{\jmath} + 2dS\, n_z\,\vec{k}$$

$$= (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) \wedge (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA})$$

$$=(\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}) - (\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MC}) - (\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MA})$$

$$= \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \vec{0}$$

$$= = 2\ aire\ (MBC)\ \vec{\imath} + 2\ aire\ (MAC)\ \vec{\jmath} + 2\ aire\ (MAB)\ \vec{k}$$

11 On en déduit par identification :
aire $(MBC) = n_x\, dS$, aire $(MAC) = n_y\, dS$, aire $(MAB) = n_z\, dS$

Le tétraèdre est en équilibre sous l'action des forces appliquées sur ses faces (les forces de volume sont des infiniment petits d'ordre supérieur) :

$$dS\,\vec{T}\,(M,\vec{n}) + n_x\, dS\,\vec{T}\,(M,-\vec{\imath}\,) + n_y\, dS\,\vec{T}\,(M,-\vec{\jmath}) + n_z\, dS\,\vec{T}\,(M,-k) = \vec{0}$$

Il vient après simplification :

$$\vec{T}\,(M,\vec{n}) + n_x\ \vec{T}\,(M,\vec{\imath}\,) + n_y\ \vec{T}\,(M,\vec{\jmath}) + n_z\ \vec{T}\,(M,,\vec{k})$$

Cette équation s'écrit sous forme matricielle :

$$\{\vec{T}\,(M,\vec{n})\} = [\{\vec{T}\,(M,\vec{\imath})\}\quad \{\vec{T}\,(M,\vec{\jmath})\}\quad \{\vec{T}\,(M,\vec{k})\}\,]\ \{n\}$$

Soit:

$$\{\vec{T}\,(M,\vec{n})\} = [\sigma(M)]\ \{n\}\ \textbf{(Formule de Cauchy)}$$

ou **[$\sigma(M)$]** est le **tenseur des contraintes de Cauchy** en M. Les composantes du tenseur des contraintes (**figure II. 6**) dans le repère $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ sont :

$$\text{composantes sur} \left\{ \begin{array}{c} \\ \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{array} \right. \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{T}(M,\vec{\imath}) & \vec{T}(M,\vec{\jmath}) & \vec{T}(M,\vec{k}) \end{array} \\ \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \end{array}$$

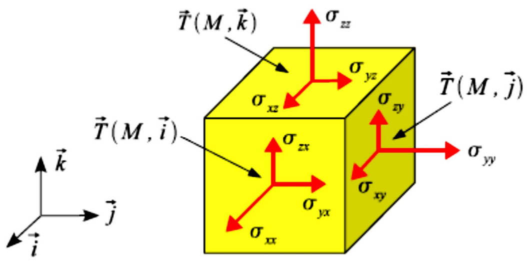


Figure II.6. Vecteur contrainte sur les facettes $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ en M

La contrainte normale sur la facette $\vec{n}$ en M est égale à :

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}\,) = \{n\}^{\mathrm{T}}\, [\sigma(M)]\, \{n\}$$

Remarque : sur la facette $\vec{n}$ (**figure II.7**), le vecteur contrainte est :

$$\vec{T}(M, \vec{\imath}) = \sigma_{xx}\, \vec{\imath} + \sigma_{yx}\, \vec{\jmath} + \sigma_{zx}\, \vec{k}$$

d'où la contrainte normale et le vecteur cisaillement :

$$\sigma_i = \vec{\imath} \cdot \vec{T}(M, \vec{\imath}\,) = \sigma_{xx}\,,\ \vec{\tau} = \sigma_{yx}\ \vec{\jmath} + \sigma_{zx}\, \vec{k}$$

12

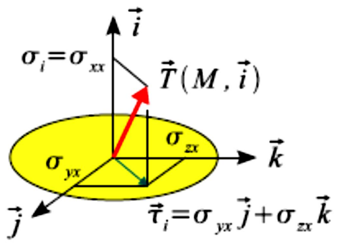


Figure II.7. *Vecteur contrainte sur la facette* $\vec{\imath}$ *en* M

Changement de repère : considérons le repère orthonormé $\{\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}'\}$ avec :

$$\begin{bmatrix} \vec{\imath}' & \vec{\jmath}' & \vec{k}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{\imath}' \cdot \vec{\imath} & \vec{\jmath}' \cdot \vec{\imath} & \vec{k}' \cdot \vec{\imath} \\ \vec{\imath}' \cdot \vec{\jmath} & \vec{\jmath}' \cdot \vec{\jmath} & \vec{k}' \cdot \vec{\jmath} \\ \vec{\imath}' \cdot \vec{k} & \vec{\jmath}' \cdot \vec{k} & \vec{k}' \cdot \vec{k} \end{bmatrix}}_{[R]}$$

et $\quad [\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}] = [\ \vec{\imath}'\ \vec{\jmath}'\, \vec{k}'\ ]\ [R]^{-1}$ avec $[R]^{-1} = [R]^{\mathrm{T}}$, det $[R] = 1$

Soit $\vec{N}$ un vecteur de composantes :

$$\{V\} = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} \quad \text{dans le repère } \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$$

et :

$$\{V'\} = \begin{Bmatrix} V'_x \\ V'_y \\ V'_z \end{Bmatrix} \quad \text{dans le repère } \{\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}'\}$$

On a les relations:

$$\vec{V} = V'\,\vec{\imath}' + V'\,\vec{\jmath}' + V'\,\vec{k}' = [\vec{\imath}' \;\; \vec{\jmath}' \;\; \vec{k}']\{\vec{V}\} = [\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}]\,[R]\{V'\} = [\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}] \;\; \{V\}$$

On en déduit :

$$\{V\} = [R]\,\{V'\} \qquad , \qquad \{V'\} = [R]^{-1}\,\{V\} = [R]^{\mathrm{T}}\,\{V\}$$

De la formule de **Cauchy** et des relations :

$\{T\} = [R]\,\{T'\}$, $\{n\} = [R]\,\{n'\}$

On déduit :

$$[R]\,\{T'\} = [\sigma]\,[R]\,\{n'\}$$

D'où :

$$\{T'\} = [R]^{\mathrm{T}}\,[\sigma]\,[R]\,\{n'\}$$

Et la formule de transformation pour la matrice des contraintes :

$$[\sigma'] = [R]^{\mathrm{T}}\,[\sigma]\,[R]$$

II.2.4. Equations d'équilibre [3].

Soit $\vec{f}$ la force par unité de volume appliquée au point de coordonnées (x, y, z) du solide. Soient $\vec{\gamma}$ l'accélération du point de coordonnées (x, y, z) et ρ la masse volumique du matériau.

II.2.4.1. Equilibre en translation [3].

Ecrivons que la projection sur x de la somme des forces appliquées au parallélépipède rectangle infiniment petit, de centre M et de cotes dx, dy et dz, est nulle (les contraintes qui interviennent sont représentées sur **la figure (II. 8))** :

$- \sigma_{xx}(x, y, z)\, dy\, dz + \sigma_{xx}(x + dx, y, z)\, dy\, dz - \sigma_{xy}(x, y, z)\, dx\, dz + \sigma_{xy}(x, y + dy, z)\, dx\, dz$
$- \sigma_{xz}(x, y, z)\, dx\, dy + \sigma_{xz}(x, y, z + dz)\, dx\, dy + f_x\, dx\, dy\, dz$
$= (\partial\sigma_{xx}/\partial x)\, dV + (\partial\sigma_{xy}/\partial y) dV + (\partial\sigma_{xz}/\partial z) dV + f_x\, dV = \rho\, dV\, \gamma_x$

Ou $dV = dx\, dy\, dz$. Il vient après simplification :

$$(\partial\sigma_{xx}/\partial x) + (\partial\sigma_{xy}/\partial y) + (\partial\sigma_{xz}/\partial z) + f_x = \rho\, \gamma_x$$

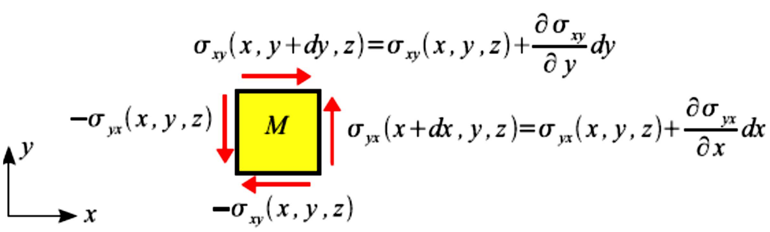


Figure II. 8. Equilibre du parallélépipède suivant x

De même :

$$(\partial\sigma_{yx}/\partial x)+(\partial\sigma_{yy}/\partial y)+(\partial\sigma_{yz}/\partial z)+f_y=\rho\,\gamma_y$$

et

$$(\partial\sigma_{zx}/\partial x)+(\partial\sigma_{zy}/\partial y)+(\partial\sigma_{zz}/\partial z)+f_z=\rho\,\gamma_z$$

II.2.4.1. Equilibre en rotation : réciprocité des contraintes tangentielles [3].

Ecrivons que la projection sur *Mz* de la somme des moments des forces appliquées au parallélépipède est nulle (les contraintes qui interviennent sont représentées sur la **figure II.9**. Il vient, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieurs à 3 :

$$dx\,(dy\,dz\,\sigma_{yx})-dy\,(dx\,dz\,\sigma_{xy})=0$$

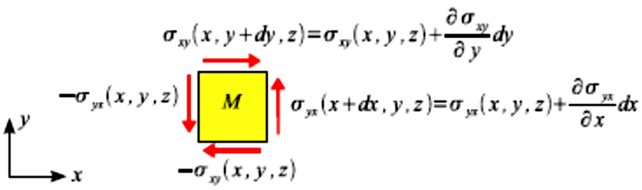
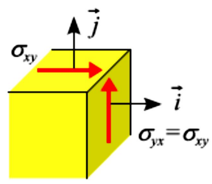


Figure II.9. Equilibre du parallélépipède en rotation suivant z

soit (réciprocité des contraintes tangentielles) :

$$\sigma_{xy}=\sigma_{yx}$$



De même :

$$\sigma_{xz}=\sigma_{zx}\,,\ \sigma_{yz}=\sigma_{zy}$$

Le tenseur des contraintes est donc symétrique :

$$[\sigma]=[\sigma]^T$$

II.2.5.Directions et contraintes principales [3].

Existe-t-il en *M* une facette $\vec{n}$ telle que le vecteur contrainte soit colinéaire avec $\vec{n}$ **figure II.11.** ? Dans ce cas, le vecteur cisaillement est nul sur cette facette et le vecteur contrainte $\vec{T}$ $(M,\ \vec{n})$ satisfait la relation :

$$\vec{T}\,(M,\vec{n})=\sigma_n\,\vec{n}$$

soit :

$$[\sigma(M)]\{n\}=\sigma_n\,\{n\}$$

σ_n est alors valeur propre du tenseur des contraintes et $\vec{n}$ est le vecteur propre associe.

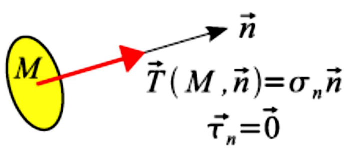


Figure II.11. Face et contrainte principale en M

$[\sigma(M)]$ est une matrice symétrique à coefficients réels. Elle a trois valeurs propres réelles (distinctes ou confondues). Si les trois valeurs propres sont distinctes, les vecteurs propres associés sont perpendiculaires entre eux.
Il existe donc en M un repère orthonormé $\{M;\ \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ tel que sur les facettes $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$ le vecteur cisaillement soit nul **figure II.12.**
Les directions $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$ sont les **directions principales**.

Dans le repère principal $\{M;\ \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$, le tenseur des contraintes s´écrit :

$$[\sigma]_{\{M;\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3\}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Ou les contraintes normales σ_1, σ_2 et σ_3 sont les **contraintes principales**.

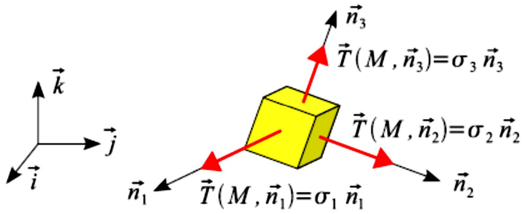


Figure .II.12. Faces et contraintes principales en M

Les trois contraintes principales sont les racines de l'équation caractéristique :
$P(\sigma n)$ = det ($[\sigma(M)] - \sigma_n$ [I]) = 0 ou [I] est la matrice unité de dimension 3, soit:

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{xx}-\sigma_n & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy}-\sigma_n & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz}-\sigma_n \end{bmatrix} = -\sigma_n^3 + I_1\,\sigma_n^2 - I_2\,\sigma_n + I_3 = 0$$

Les contraintes principales sont indépendantes du repère $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$. I_1, I_2 et I_3 sont des invariants :

$I_1 = \mathrm{tr}\,[\sigma] = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$

$I_2 = 1/2((\mathrm{tr}\,[\sigma])^2 - \mathrm{tr}\,[\sigma]^2) = \sigma_{xx}\,\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\,\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\,\sigma_{zz} - \sigma^2{}_{xy} - \sigma^2{}_{xz} - \sigma^2{}_{yz}$

$= \sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_1\,\sigma_3 + \sigma_2\,\sigma_3$

$I_3 = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\,\sigma_{zz} + 2\,\sigma_{xy}\,\sigma_{xz}\sigma_{yz} - \sigma_{xx}\,\sigma^2{}_{yz} - \sigma yy\,\sigma^2{}_{xz} - \sigma_{zz}\,\sigma^2{}_{xy} = \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3$

Dans le repère principal $\{M;\ \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$, les composantes du vecteur contrainte sur la facette $\vec{n}$ sont :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1\,n_1 \\ \sigma_2\,n_2 \\ \sigma_3\,n_3 \end{Bmatrix}$$

ou n_1, n_2 et n_3 sont les composantes de $\vec{n}$. Compte-tenu de la relation :

$$n_1^2+ n_2^2+ n_3^2= 1$$

on en déduit :

$$T_1^2/\sigma_1^2+T_2^2/\sigma_2^2+T_3^2/\sigma_3^2= 1$$

Quand $\vec{n}$ varie, l'extrémité du vecteur $\vec{T}\ (M, \vec{n})$ se déplace sur l'**ellipsoïde de Lamé** dont les axes sont les directions principales et les demi axes sont σ_1, σ_2 et σ_3.