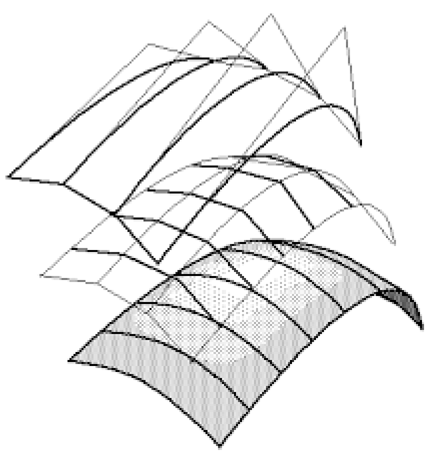
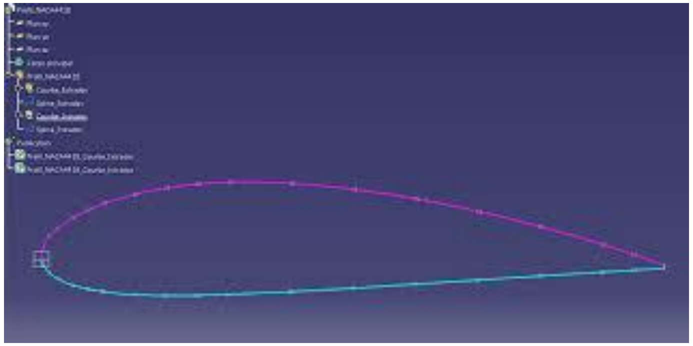
Usinage des surfaces gauches

Master II Fabrication mécanique et productique

Introduction

Un logiciel de CAO se compose en général d'un modeleur géométrique, d'un outil de visualisation et d'outils de calcul. Le vocabulaire du modeleur géométrique est celui de la géométrie : points, droites, plans, courbes de Bézier, **courbes splines**, surfaces de Bézier, **surfaces splines**, surfaces NURBS… et aussi celui de la topologie : sommets, arêtes, faces, intérieur/extérieur, union, intersection…





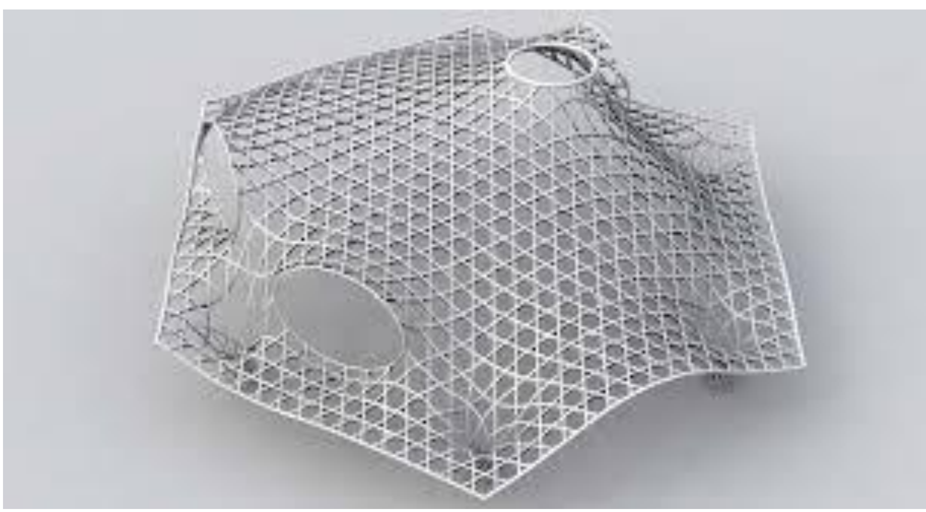
Introduction

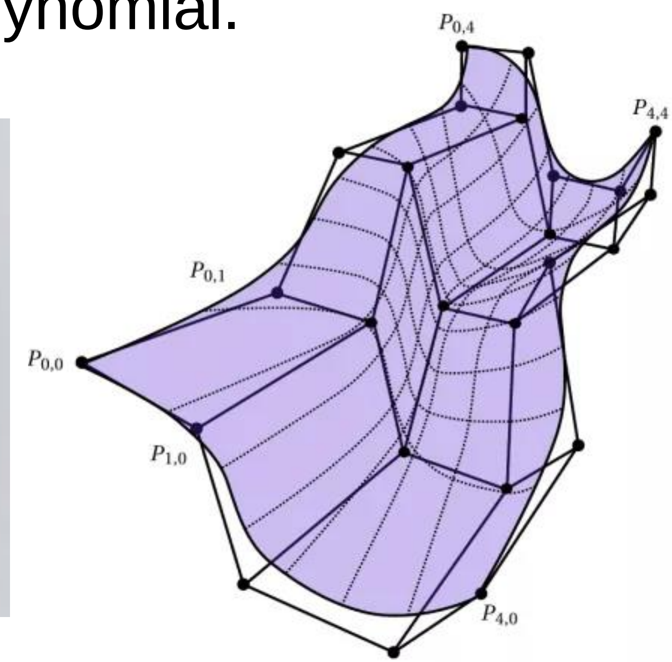
Nous nous intéressons ici à la partie modélisation de formes géométriques 2D ou 3D dites complexes qui sont utilisées dans des domaines très variés : conception mécanique, design numérique, design de mode, animation et jeux vidéos…

L'idée de cette modélisation repose sur la création d'outils mathématiques motivés par une utilisation intuitive et facile de ces modèles par des stylistes, concepteurs, graphistes…

Introduction

Ainsi, la modélisation 2D et 3D fait intervenir un ensemble de courbes et de surfaces permettant de représenter les frontières des objets modélisés. Le modèle de représentation qui s'est imposé naturellement est le modèle polynomial.





Historique

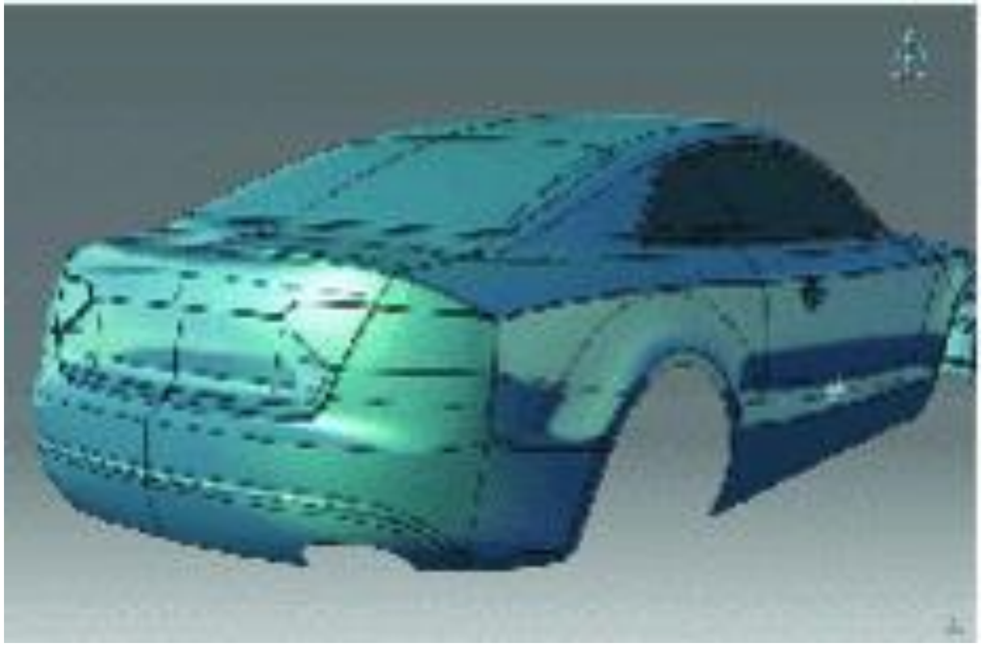
La conception mécanique assistée par ordinateur pour l'automobile a très certainement été la première grande application de la modélisation géométrique par polynômes. Elle a été promue par deux ingénieurs français à la fin des années 1950, Pierre Bézier chez Renault et Paul Faget de Casteljau chez Citroën.

Pierre Bézier
1910-1999

Paul Faget de Casteljau
Né le 19 novembre 1930

Historique

L'idée était qu'il fallait concevoir, dès le bureau d'études, les formes des voitures et de leurs composants directement à l'aide d'expressions mathématiques.

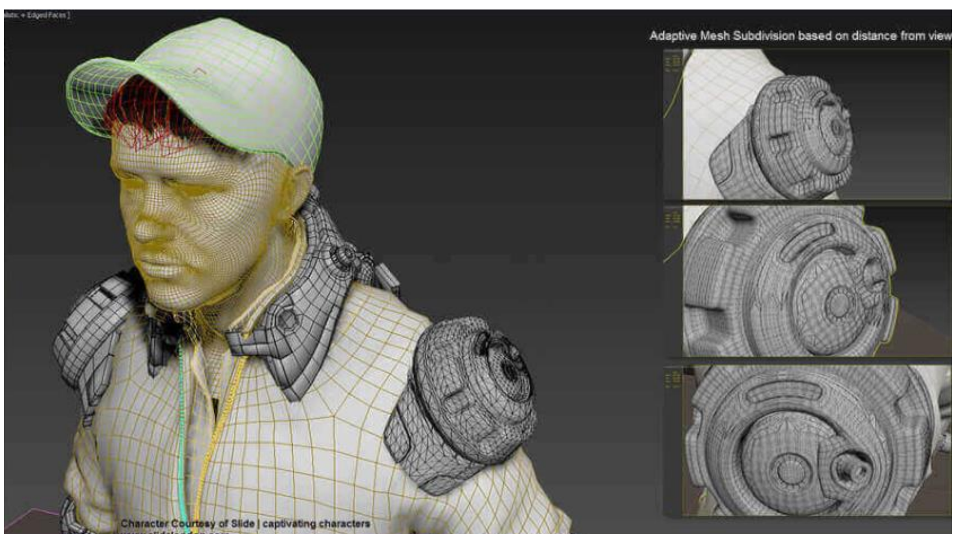


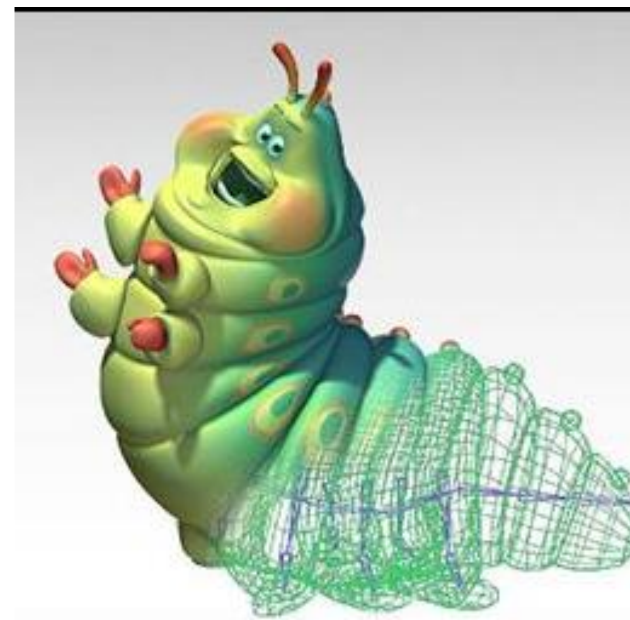
Historique

Cette méthodologie a inspiré un groupe de développeurs liés à Apple et chargés de créer un langage adapté à la future imprimante laser conçue pour le Mac. En effet, ce groupe utilisa les courbes de Bézier pour définir le tracé des caractères à imprimer. Le langage PostScript est issu de ce travail. L'utilisation des courbes de Bézier permet de fixer un dessin de lettre et de le reproduire aisément qu'elle ait la taille d'une tête d'épingle ou celle d'une façade d'immeuble.

Historique

L'idée fondatrice de cette méthodologie est de structurer le contrôle du design des courbes ou des surfaces à créer *via* l'utilisation d'éléments géométriques de contrôle qui donnent une « bonne idée » de la forme sous-jacente. Elle a été étendue avec succès dans le cadre de la définition de courbes et de surfaces dites par subdivision pour des applications dans le domaine de l'animation.





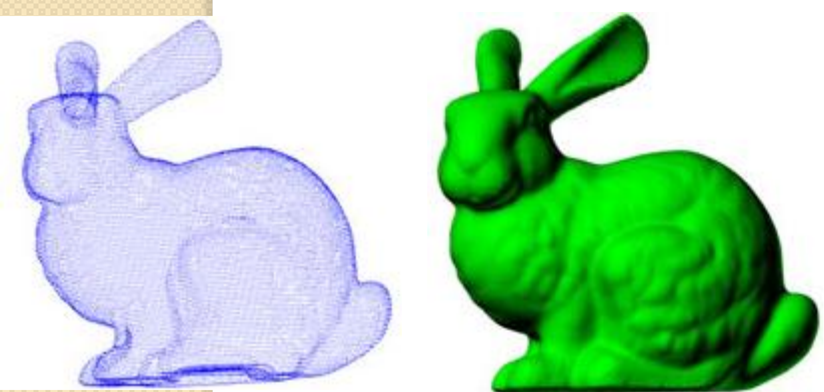
Historique

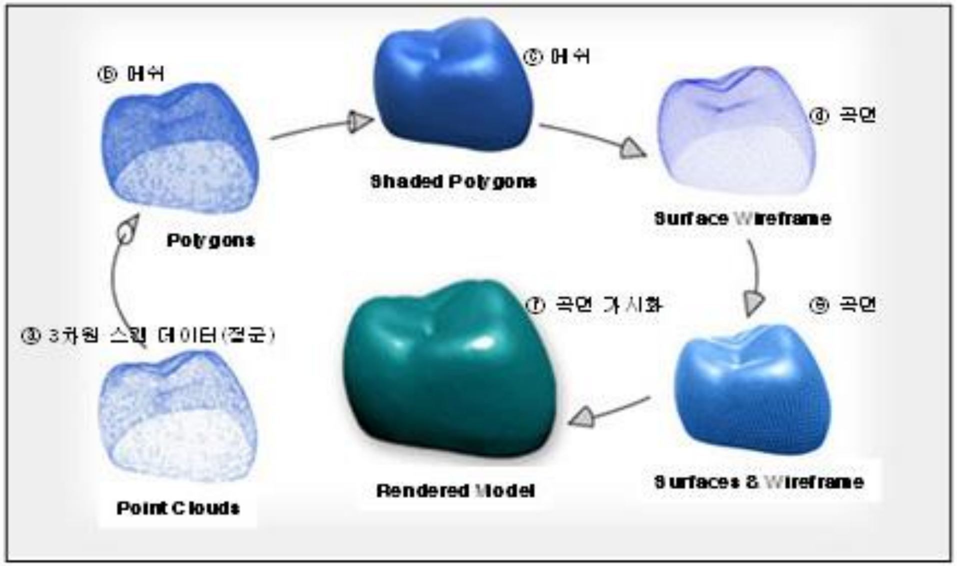
Une autre approche, dite de rétro-conception, peut être complémentaire à cette stratégie de design géométrique. En effet, il peut être intéressant de se baser sur des formes issues d'objets physiques pour recréer des modèles géométriques. À partir de mesures de points 3D de ces objets, l'objectif est alors de créer une représentation continue de ces données sous forme de surfaces. Ces surfaces sont alors utilisées soit pour reproduire ces objets soit pour modifier leur forme pour les adapter à un nouveau contexte de design. Il peut se présenter plusieurs dizaines de millions de points dans le cas d'une capture par scanner laser.

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Historique

Cette problématique de reconstruction automatique de surfaces 3D à partir d'un grand flot de points non organisés est encore une problématique ouverte actuellement bien que des avancées significatives aient été réalisées ces dernières années.





Historique

La maîtrise de courbes consiste à contrôler leur forme à partir d'un ensemble de données discrètes simples et visuelles comme des points par exemple. Ces données discrètes sont les mieux adaptées au travail de « mise en forme » des stylistes, concepteurs ou graphistes car plus intuitives que les équations du modèle des courbes sous-jacent.

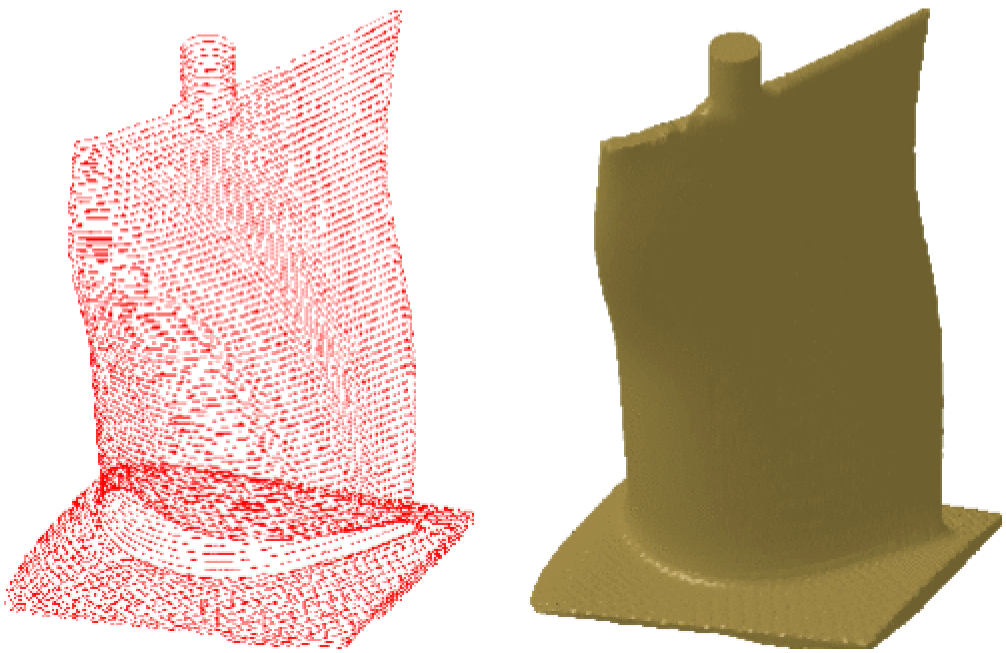
Historique

Ce modèle est nécessaire afin d'assurer la reproductibilité de ces formes sur machine outil ou ordinateur.

Le principal objectif du design géométrique concerne la création d'objets géométriques reproductibles. Le modèle polynomial s'impose car il présente une complexité de calcul linéaire avec le degré. En outre, il est très facile de partager la définition des polynômes sur n'importe quel ordinateur.

Historique

Il suffit par exemple de communiquer les coefficients des polynômes, codés sous forme de nombres flottants, pour reproduire ces caractères à l'identique sur n'importe quel système informatique.



Exemple de scan par nappe laser 3D (à gauche) et la surface spline polynomiale reconstruite (à droite)

Représentation paramétrique

- Forme paramétrique générale d'une courbe en 3D:

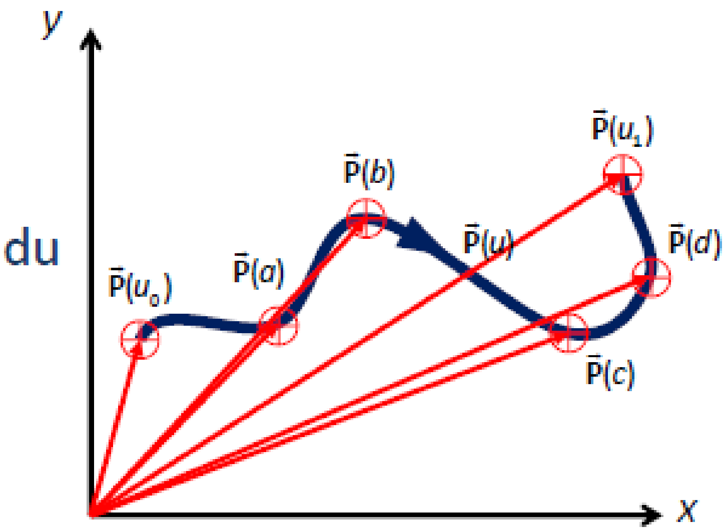
  $$\vec{\mathbf{P}}(u) = \begin{bmatrix} x(u) & y(u) & z(u) \end{bmatrix} \quad , u \in [u_0, u_1]$$

  où x(u), y(u) et z(u) sont les composants de chaque point de la courbe évaluée en u dans l'intervalle $[u_0,u_1]$.

- Forme réduite en 2D:

  $$\vec{\mathbf{P}}(u) = \begin{bmatrix} x(u) & y(u) \end{bmatrix} \quad , u \in [u_0, u_1]$$

- Exemple:
  a, b, c et d sont des valeurs discrètes du paramètre u telles que
  $u_0 < a < b < c < d < u_1$.

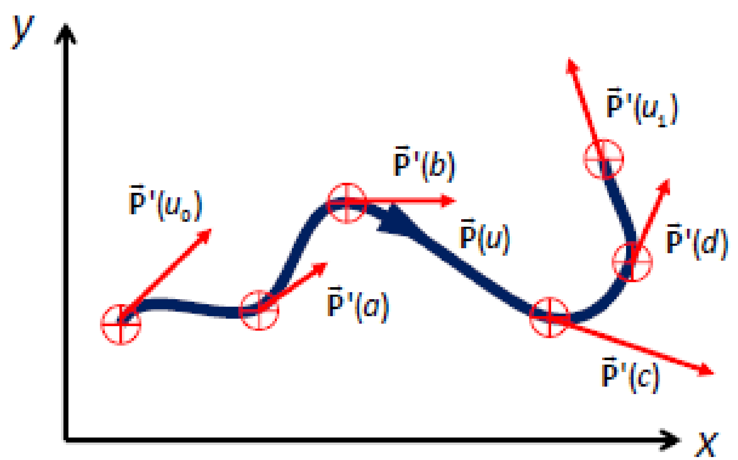


Représentation paramétrique

- La dérivé première en u d'une courbe paramétrique donne l'ensemble des vecteurs tangents:

$$\vec{\mathbf{P}}'(u) = \begin{bmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dy}{du} & \frac{dz}{du} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'(u) & y'(u) & z'(u) \end{bmatrix} \quad , u \in [u_0, u_1]$$

où x'(u), y'(u) et z'(u) sont les composants de chaque vecteurs tangents de la courbe évaluée en u dans l'intervalle $[u_0,u_1]$.



1985
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Courbes polynomiales

- Les courbes analytiques sont insuffisantes pour répondre aux exigences de conception géométrique des pièces mécaniques:
  - Carrosseries de voitures,
  - Coques de navire,
  - Fuselages et ailes d'aéronefs,
  - Pales d''hélices,
  - Semelles de chaussures,
  - Etc.
- On a recours aux courbes complexes ou « synthétiques » lorsqu'une courbe est d'abord représentée par une collection de points de contrôle.
- Objectif: construire une courbe lisse qui interpole ou approxime un ensemble ordonné de points de contrôle.

Courbes polynomiales

- Forme générale d'une équation paramétrique d'une courbe polynomiale de degré n :

$$\vec{P}(u) = \sum_{i=0}^{n} \vec{a}_i u^i = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 u + \vec{a}_2 u^2 + \ldots + \vec{a}_n u^n \qquad \text{avec } u \in [u_0, u_1]$$

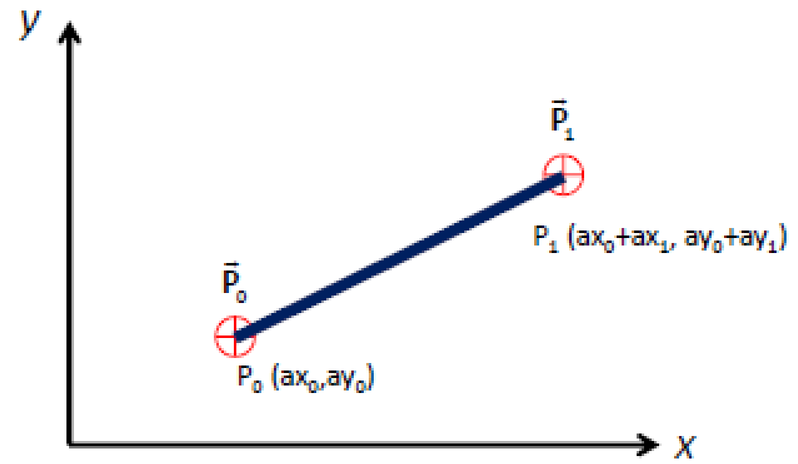
  - a_i : vecteurs de dimension 3 (pour courbe dans l'espace de dimension 3)
  - 1, u, u^2, u^n : fonctions de base, u ϵ [0,1] pour limiter la courbe en CAO
  - a_1u, a_2u^2, a_nu^n : monômes (polynôme à 1 seul terme)
  - Degré du polynôme : degré du monôme le plus élevé

  - Une courbe représentée par un polynôme de degré n passe exactement par n+1 points

Courbes polynomiales

- Exemple:
  L'interpolation de 2 points donne une droite, représentée par un polynôme de degré 1;

$$\vec{P}(u) = \sum_{i=0}^{1} \vec{a}_i u^i \qquad \text{avec } u \in [0,1]$$
$$= \vec{a}_0 + \vec{a}_1 u$$
$$= \vec{P}_0 + \left(\vec{P}_1 - \vec{P}_0\right) u$$

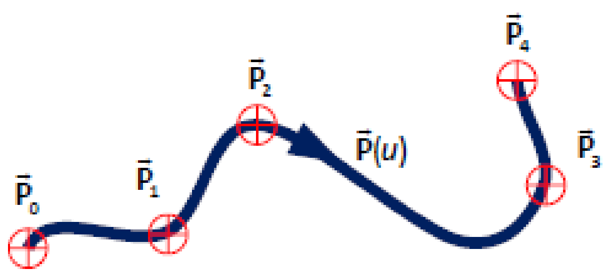


avec :
$a_0 = (ax_0 , ay_0)$
$a_1 = (ax_1 , ay_1)$
$P(0) = P0 = (ax_0 , ay_0)$
$P(1) = P1 = (ax_0 + ax_1 , ay_0 + ay_1)$

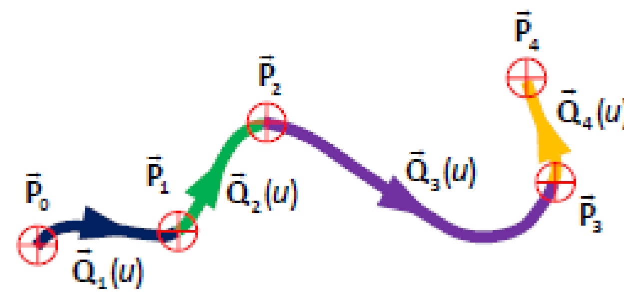
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Courbes polynomiales

- Pour construire une courbe à l'aide d'un ensemble ordonné de ***N*** points de contrôle, on peut…
  - Construire une seule courbe utilisant tous les points; le degré de la courbe est donc dépendant du nombre de points.
  - Construire plusieurs segments consécutifs de courbes de degré imposé ***n*** utilisant chacun un sous-ensemble de ***n*** **+ 1** points de contrôle.



Courbe unique



Courbe par segments

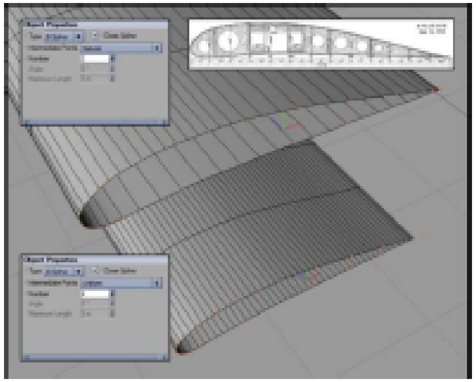
Courbes polynomiales

- Les courbes (polynômes) de degré élevé ne sont habituellement pas utilisés en CAO, car:
  - Elles ont tendance à osciller de manière indésirable au voisinage des points de contrôle;
  - Elles accaparent énormément de ressources de calcul d'un ordinateur;
  - Leurs représentations internes n'est pas concise (occupent inutilement beaucoup d'espace mémoire).

- En CAO, les courbes sont généralement:
  - Définies par morceaux;
  - Construites à l'aide de segments des courbes polynomiales de degré 3;
  - Décrites sous forme paramétrique.

Courbes polynomiales

- Les courbes paramétriques par morceaux de degré 3
  - Avantages :
    - Permettent la représentation de courbes dans l'espace de dimension 3;
    - 2 courbes de degré 3 peuvent être raccordées en respectant une continuité du 2ième ordre;
    - Les courbes ainsi raccordées semblent formées une seule courbe
- Continuité des courbes par morceaux:
  - Différentes exigences de continuité des profils peuvent être spécifiées dans la conception des pièces mécaniques:
    - Aérodynamisme d'un fuselage ou d'une aile;
    - Fluidité de mouvement d'un galet parcourant une came, etc.

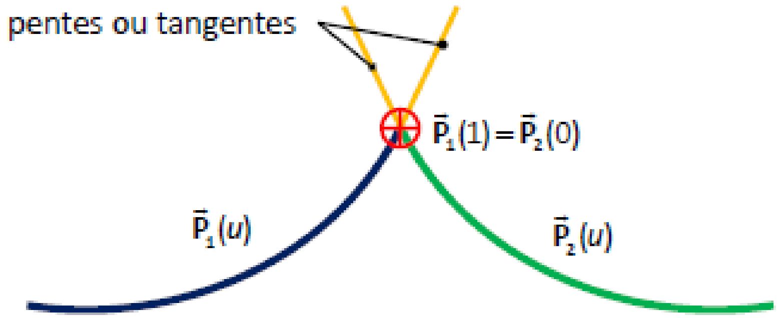


Courbes polynomiales

- Continuité des courbes par morceaux (suite):
  - L'ordre de continuité prend de l'importance lorsque les courbes complexes sont définies par segments;
  - Le plus petit ordre de continuité à un point de jonctions de deux segments définit l'ordre de continuité de la courbe résultante;
  - Continuité géométrique / continuité paramétrique:
    - Continuité géométrique (Gx), continuité ou « aspect lisse » de la courbe résultante;
    - Continuité paramétrique (Cx), continuité dans le traçage de la courbe (aspect dynamique, analogie avec le mouvement d'une particule se déplaçant le long des segments de courbes.

Courbes polynomiales

- Continuité des courbes par morceaux (suite):
  - G0: Continuité géométrique d'ordre 0
    - Deux segments de courbes forment une courbe continue G0 si celle-ci est ininterrompue au point de jonction;
    - Appelée aussi continuité de position;
    - Correspond à une courbe tracée sans lever le crayon…



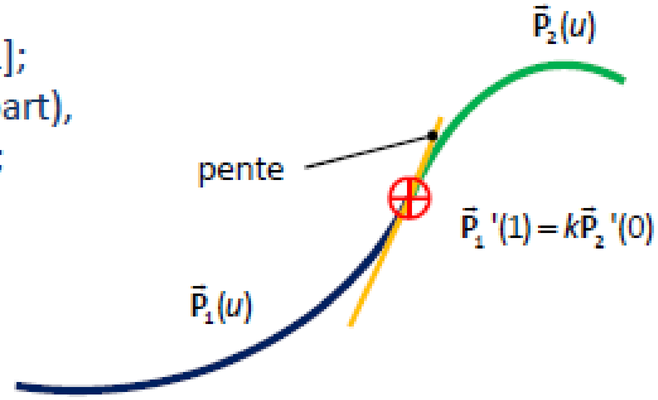
- Soit P1(u) et P2(u) définis sur u ∊ [0,1];
  P1(1) étant le point d'arrivée de P1
  P2(0) étant le point de départ de P2
  P1 et P2 sont continues G0
  si P1(1) = P2(0)

Courbes polynomiales

- Continuité des courbes par morceaux (suite):
  - G1: Continuité géométrique d'ordre 1
    - Deux segments de courbes forment une courbe continue G1 si la pente au point de jonction est la même pour les deux segments;
    - Appelée aussi continuité de pente ou tangence;
    - On fait correspondre la direction des vecteurs tangents.
      - Soit P1(u) et P2(u) définis sur $u \in [0,1]$;
        P1'(1) étant la tangente en P1(1) (départ),
        P2'(0) étant la tangente en P2(0) (fin);

        P1 et P2 sont continues G1 si

$$\vec{P}_1'(1) = k\vec{P}_2'(0) \quad , k > 0.$$



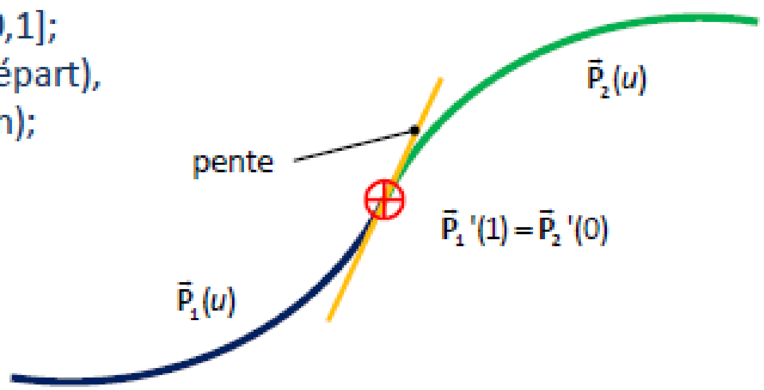
Courbes polynomiales

- Continuité des courbes par morceaux (suite):
  - C1: Continuité paramétrique d'ordre 1
    - G1 correspond à la continuité de la direction du vecteur tangent;
    - C1 implique G1 ET la continuité de la grandeur du vecteur tangent;
    - Correspond au tracé d'une courbe lisse sans changement brusque de vitesse;
    - On fait correspondre les dérivées premières au point de jonction.

      - Soit P1(u) et P2(u) définis sur $u \in [0,1]$;
        P1'(1) étant la tangente en P1(1) (départ),
        P2'(0) étant la tangente en P2(0) (fin);

        P1 et P2 sont continues C1 si

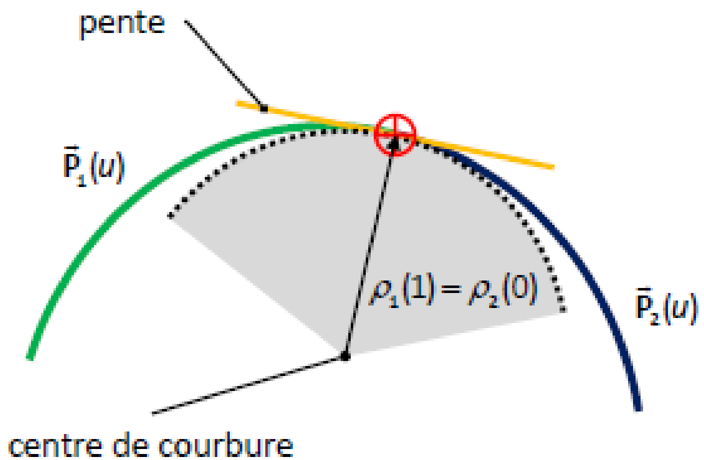
$$\vec{P}_1\,'(1) = \vec{P}_2\,'(0).$$



Courbes polynomiales

- Continuité des courbes par morceaux (suite):
  - G2: Continuité géométrique d’ordre 2
    - Deux segments de courbes forment une courbe continue G2 si le centre de courbure au point de jonction est le même pour les deux segments;
    - Appelée aussi continuité de courbure;
    - Pour P(u) = [x(u) y(u)], le rayon de courbure ρ(u) est défini par l’équation:

$$\rho(u) = \frac{\left(x'(u)^2 + y'(u)^2\right)^{3/2}}{x'(u)y''(u) - y'(u)x''(u)}$$



Courbes polynomiales

- Continuité des courbes par morceaux (suite):
  - C2: Continuité paramétrique d'ordre 2
    - Deux segments de courbes forment une courbe continue C2 si leurs dérivées secondes respectives au point de jonction sont égales;
    - Correspond au déplacement d'un particule dont la vitesse et l'accélération (tangentielle et normale) varient graduellement.
  - En conclusion…
    - En modélisation, on s'intéresse surtout à continuité géométrique.
    - En analyse, la continuité paramétrique peut être une condition nécessaire aux calculs basés sur la géométrie.

Courbes polynomiales cubiques

- Exemple simple d'équation paramétrique de degré 3:

$$\begin{cases} x(u) = a_1 + b_1 u + c_1 u^2 + d_1 u^3 \\ y(u) = a_2 + b_2 u + c_2 u^2 + d_2 u^3 \\ z(u) = a_3 + b_3 u + c_3 u^2 + d_3 u^3 \end{cases}$$

(représentation algébrique)

$$\vec{\mathbf{P}}(u) = \vec{a} + \vec{b}u + \vec{c}u^2 + \vec{d}u^3$$

(représentation vectorielle)

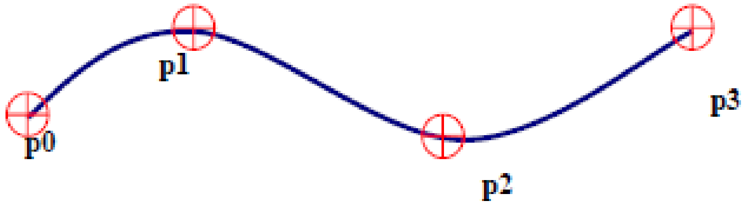
- Courbe polynomiale cubique
- 3 équations algébriques, u ϵ [0,1]
- 12 inconnus a_i, b_i, c_i, d_i avec i = 1, 2, 3
- Fixer ou modifier les valeurs des coefficients algébriques a_i, b_i, c_i, d_i ne permet pas de contrôler facilement la forme de la courbe
- Contraintes géométriques :
  - Degré 3 donc cette courbe passe par 4 points correspondant à 4 valeurs de u
  - Ou 2 points et 2 tangentes en ces points

Courbes polynomiales cubiques

- Interpolation de Lagrange (en 2D)
  - Soit les équations du polynôme :

$$\begin{cases} x(u) = a_1 + b_1 u + c_1 u^2 + d_1 u^3 \\ y(u) = a_2 + b_2 u + c_2 u^2 + d_2 u^3 \end{cases}$$

  - L'interpolation de Lagrange utilise quatre points (p0 à p3).
  - On obtient donc un système de 8 équations correspondant au coordonnées x, y de chaque point (12 équations en 3D pour x, y, z).
  - La résolution fournit les valeurs des paramètres a_i , b_i , c_i et d_i .

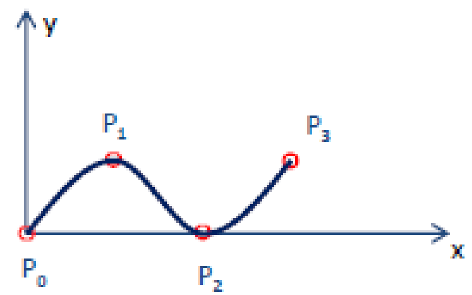


Courbes polynomiales cubiques

- Interpolation de Lagrange (suite)
  - Exemple en 2D: Expression matricielle

$$\vec{\mathbf{P}}(u) = \begin{bmatrix} x(u) & y(u) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \\ c_x & c_y \\ d_x & d_y \end{bmatrix}$$



  - Résolution matricielle

$$\begin{bmatrix} \vec{\mathbf{P}}(u_0) \\ \vec{\mathbf{P}}(u_1) \\ \vec{\mathbf{P}}(u_2) \\ \vec{\mathbf{P}}(u_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_0 & u_0^2 & u_0^3 \\ 1 & u_1 & u_1^2 & u_1^3 \\ 1 & u_2 & u_2^2 & u_2^3 \\ 1 & u_3 & u_3^2 & u_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{a}} \\ \vec{\mathbf{b}} \\ \vec{\mathbf{c}} \\ \vec{\mathbf{d}} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{a}} \\ \vec{\mathbf{b}} \\ \vec{\mathbf{c}} \\ \vec{\mathbf{d}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_0 & u_0^2 & u_0^3 \\ 1 & u_1 & u_1^2 & u_1^3 \\ 1 & u_2 & u_2^2 & u_2^3 \\ 1 & u_3 & u_3^2 & u_3^3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{P}}(u_0) \\ \vec{\mathbf{P}}(u_1) \\ \vec{\mathbf{P}}(u_2) \\ \vec{\mathbf{P}}(u_3) \end{bmatrix}$$

Déterminant d'une matrice

Calcul du déterminant pour une matrice 2×2

Considérons la matrice A de dimension 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice A est définie par la relation

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Exemple

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de A est ainsi

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Définition d'un mineur

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Le mineur M_{12} est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la 1ère rangée et la 2^e colonne de A, c'est-à-dire

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 5.3 - 3.8 = 15 - 24 = -9$$

Le mineur M_{22} est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la 2^e rangée et la 2^e colonne de A, c'est-à-dire

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 2.3 - 4.8 = 6 - 32 = -26$$

Définition d'un cofacteur

Le cofacteur, C_{ij}, d'une matrice A est défini par la relation

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Vous constaterez que le cofacteur et le mineur ont toujours la même valeur numérique, à l'exception parfois de leur signe.

Définition d'un cofacteur

Considérons à nouveau la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Nous avons déjà montré que le mineur $M_{12} = -9$. Ainsi, le cofacteur correspondant, C_{12}, est

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -1.(-9) = 9$$

Il s'avère que le mineur, M_{12}, et le cofacteur, C_{12}, sont de signes différents.

Le mineur $M_{22} = -26$. Son cofacteur correspondant, C_{22}, est

$$\mathrm{C}_{22} = (-1)^{2+2} \mathrm{M}_{22} = 1.(-26) = -26$$

Cette fois, le mineur, M_{22}, et le cofacteur, C_{22}, sont identiques.

Évaluer le déterminant d'une matrice 3×3 sera maintenant possible. Nous procéderons en réduisant celui-ci en une série de déterminants 2×2, pour lesquels le calcul est nettement plus facile. Ce processus est appelé **une expansion par cofacteurs**.

Expansion par cofacteurs - méthode de calcul des déterminants

Soit A une matrice carrée et C_{ij} ses cofacteurs. Le déterminant est obtenu en suivant une expansion par cofacteurs comme suit :

- Choisir une rangée ou une colonne de A (si possible, il est plus rapide de choisir la rangée ou la colonne de A contenant le plus grand nombre de zéros)...
- Multiplier chacun des éléments a_{ij} de la rangée (ou colonne) choisie par son cofacteur, C_{ij}, correspondant...
- Faire la somme de ces résultats.

Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Calcul du déterminant pour une matrice 3×3

Pour une matrice 3 × 3, cela voudrait dire qu'en choisissant de faire une expansion le long de la première rangée, le déterminant serait

$$det\ A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

Si l'on avait choisi de faire une expansion le long de la deuxième colonne, alors il faudrait calculer

$$det\ A = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

Quoique le choix de rangée ou de colonne puisse différer, le résultat du déterminant sera le même quel que soit ce choix. Vérifions par un exemple.

Exemple

Quel est le déterminant de la matrice A?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Solution

Suivons le processus proposé plus haut (expansion par cofacteurs) :

- Choisir une rangée ou une colonne de A... Pour l'instant, choisissons la première rangée.
- Multiplier chacun des éléments de cette rangée par leurs cofacteurs correspondants... Les éléments de la première rangée sont $a11 = 2, a12 = 1$, et $a13 = 3$ que l'on multiple avec les cofacteurs correspondants, c'est-à-dire C_{11}, C_{12} et C_{13} qui sont

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1(0.(-2) - 2.0) = 0$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1(1 \times (-2) - 2 \times 2) = 6$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1(1 \times (0) - 2 \times 0) = 0$$

Finalement, il s'agit de faire le calcul

$$det\ A = a_{12} C_{12} + a_{22} C_{22} + a_{32} C_{32}$$

$$det\ A = 2 \times 0 + 6 \times 1 + 3 \times 0 = 6$$

Vérifions si une expansion le long de la deuxième colonne appuierait le résultat précédent. Notez que le choix de la deuxième colonne est nettement la plus efficace puisque le déterminant sera obtenu du calcul

$$\boldsymbol{det\ A = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}}$$

et deux des trois éléments de la 2e colonne sont nuls. En effet, $a_{12} = 1, a_{22} = 0, et\ a_{32} = 0$. Il est ainsi inutile de calculer les cofacteurs C_{22} et C_{32}. Pour sa part, le cofacteur correspondant à a_{12} est

$$\mathrm{C}_{12} = (-1)^{1+2}\mathrm{M}_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1(1 \times (-2) - 2 \times 2) = 6$$

Le déterminant de A est donc

$$\mathrm{det\ A} = \mathrm{a}_{12}\mathrm{C}_{12} + \mathrm{a}_{22}\mathrm{C}_{22} + \mathrm{a}_{32}\mathrm{C}_{32} = 1 \times 6 + 0 \times \mathrm{C}_{22} + 0 \times \mathrm{C}_{32} = 6$$

ce qui correspond effectivement à la réponse obtenue par une expansion le long de la première rangée.

Déterminants de matrices carrées de dimensions 4x4 et plus

Les méthodes présentées dans le cas des matrices 3×3 demeurent valides pour toutes les dimensions supérieures. Il s'agit à nouveau de suivre les étapes d'une expansion par cofacteurs :

Soit A une matrice carrée et C_{ij} ses cofacteurs. Le déterminant est obtenu en suivant une expansion par cofacteurs comme suit :

- Choisir une rangée ou une colonne de A (si possible, il est plus rapide de choisir la rangée ou la colonne de A contenant le plus grand nombre de zéros)...
- Multiplier chacun des éléments a_{ij} de la rangée (ou colonne) choisie par son cofacteur, C_{ij}, correspondant...
- Faire la somme de ces résultats.

Il faut toutefois noter une distinction. Le cofacteur associé à l'élément a_{ij} d'une matrice 4×4 est le déterminant d'une matrice 3×3, puisqu'il est obtenu en éliminant une rangée (la i^e) et une colonne (la j^e) de A.

Exemple

Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il devient essentiel, pour réduire le nombre de calculs, de choisir la rangée ou la colonne qui contient le plus grand nombre de zéros, en l'occurrence, la 4^e colonne. Nous procéderons donc à une expansion par cofacteurs le long de la 4^e colonne ce qui veut dire que

$$det\ A = a_{14}C_{14} + a_{24}C_{24} + a_{34}C_{34} + a_{44}C_{44}$$

Comme a_{14} et a_{44} sont nuls, il serait inutile de chercher à trouver C_{14} et C_{44}. Pour leur part, les cofacteurs C_{24} et C_{34} seront nécessaires...

$$C_{24} = (-1)^{2+4} M_{24} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$C_{34} = (-1)^{3+4} M_{34} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Nous vous laissons vérifier que $C_{24} = 18$ et $C_{34} = -2$. Par conséquent, le déterminant de A est

$$det\ A = a_{14}C_{14} + a_{24}C_{24} + a_{34}C_{34} + a_{44}C_{44}$$

$$det\ A = 0 \times C_{14} + 1 \times 18 + 1 \times (-2) + 0 \times C_{44} = 16$$

Déterminants de matrices carrées de dimensions 3x3

Rappel. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$ **Définition.**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \underset{\text{la 1e col.}}{\overset{\text{suivant}}{=}} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + (-d) \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

ou bien (on obtient le même résultat)

$$\underset{\text{la 1e ligne}}{\overset{\text{suivant}}{=}} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + (-b) \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Matrice inverse

Théorème. Soit A une matrice carrée. Il suffit de vérifier si $\det A = 0$ ou pas pour répondre aux question suivantes :

	$\det A \neq 0$	$\det A = 0$
Le système $A\vec{x} = \vec{b}$ admet-il une unique sol. ?	Oui	Non
Est-ce que la matrice A est inversible ?	Oui	Non

Matrice inverse

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ Com(A) = \begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{pmatrix},\ \text{où}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \text{etc. , et } A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^t Com(A),\ \text{si } \det A \neq 0.$$

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ Com(A) =$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \; Com(A) = \begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{pmatrix}, \text{ où}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ etc. , et } A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^{t}Com(A), \text{ si } \det A \neq 0.$$

$$\text{Exemple. } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; Com(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \; \det A = 1,$$

$$\text{et } A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^{t}Com(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

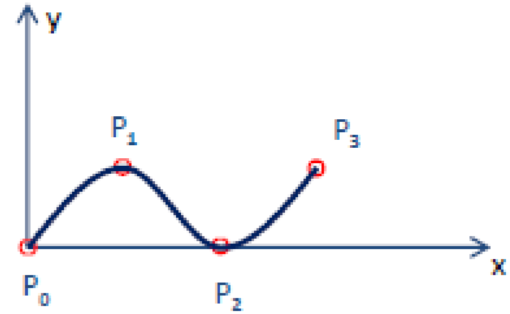
Voici les 4 étapes pour calculer A^{-1} :

- Calculer les 'mineurs' M_{ij}
- rajouter les signes (en alternant) pour former $Com(A)$
- transposer la comatrice
- diviser par $\det A$.

Courbes polynomiales cubiques

- Interpolation de Lagrange (suite)
  - Exemple : Déterminer l'équation polynômiale cubique de la courbe passant par les 4 points suivants:

    - $u_0 = 0$; $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}(u_0) = (0, 0)$
    - $u_1 = 0{,}33$; $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}(u_1) = (1, 1)$
    - $u_2 = 0{,}66$; $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}(u_2) = (2, 0)$
    - $u_3 = 1$; $\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}(u_3) = (3, 1)$

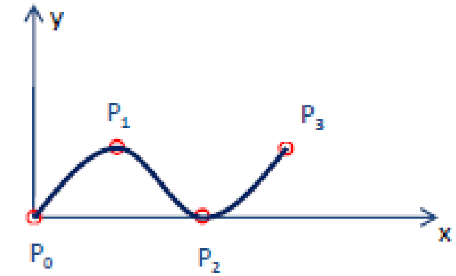


$$\vec{\mathbf{P}}(u) = \vec{a} + \vec{b}u + \vec{c}u^2 + \vec{d}u^3$$

    - Trouver a_x, b_x, c_x, d_x et a_y, b_y, c_y, d_y ...

Courbes polynomiales cubiques

- **Solution:** u=i/(n-1)
  - Déterminer l'équation polynômiale cubique de la courbe passant par les 4 points suivants:
    - $u_0 = 0;$ $P_0 = P(u_0) = (0, 0)$
    - $u_1 = 0{,}33;$ $P_1 = P(u_1) = (1, 1)$
    - $u_2 = 0{,}66;$ $P_2 = P(u_2) = (2, 0)$
    - $u_3 = 1;$ $P_3 = P(u_3) = (3, 1)$



  - Trouver a_x, b_x, c_x, d_x et a_y, b_y, c_y, d_y ...
  - Matrice U $\begin{bmatrix} 1 & u_0 & u_0^2 & u_0^3 \\ 1 & u_1 & u_1^2 & u_1^3 \\ 1 & u_2 & u_2^2 & u_2^3 \\ 1 & u_3 & u_3^2 & u_3^3 \end{bmatrix}$

1	0	0	0
1	0.33	0.1089	0.035937
1	0.66	0.4356	0.287496
1	1	1	1

  - Matrice inverse U^{-1}

1	0	0	0
-5.54545	9.045681	-4.45633	0.956102
9.136823	-22.7513	17.96035	-4.34592
-4.59137	13.70558	-13.504	4.389816

  - Termes a_x, b_x, c_x, d_x et a_y, b_y, c_y, d_y

$$\begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \\ \vec{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_0 & u_0^2 & u_0^3 \\ 1 & u_1 & u_1^2 & u_1^3 \\ 1 & u_2 & u_2^2 & u_2^3 \\ 1 & u_3 & u_3^2 & u_3^3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \vec{P}(u_0) \\ \vec{P}(u_1) \\ \vec{P}(u_2) \\ \vec{P}(u_3) \end{bmatrix}$$

Coef_x	Coef_y
0	0
3.00133	10.00178
0.131694	-27.0972
-0.13302	18.09539

Courbes polynomiales cubiques

- Interpolation de Lagrange (fin)
  - Inconvénients principaux:
    - Le degré de la courbe est directement lié au nombre de points interpolés => (n+1) points = degré n;
    - Dans le cas d'une seule courbe, plus il y a de points, plus il y a des oscillations indésirables dans la courbe.

Courbes polynomiales cubiques

- Interpolation de Hermite (en 2D)
  - Soit les équations du polynôme :

$$\begin{cases} x(u) = a_1 + b_1 u + c_1 u^2 + d_1 u^3 \\ y(u) = a_2 + b_2 u + c_2 u^2 + d_2 u^3 \end{cases}$$

  - L'interpolation de Hermite utilise deux points p_0 et p_1 et leurs pentes respectives p_0' et p_1' pour déterminer les 8 inconnues (12 en 3D).

Courbes polynomiales cubiques

- Interpolation de Hermite (suite)
  - La résolution passe par la réécriture des équations du polynôme sous forme vectorielle (en gras):

$\mathbf{p} = \mathbf{p}(u) = \mathbf{k_0} + \mathbf{k_1}u + \mathbf{k_2}u^2 + \mathbf{k_3}u^3$

ou encore $\mathbf{p}(u) = \Sigma\, \mathbf{k_i}\, u^i$ pour i de 0 à 2

avec $\mathbf{p} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$\mathbf{k}_0 = (a_1, a_2, a_3)$

$\mathbf{k}_1 = (b_1, b_2, b_3)$

$\mathbf{k}_2 = (c_1, c_2, c_3)$

$\mathbf{k}_3 = (d_1, d_2, d_3)$

$$\vec{\mathbf{P}}(u) = \vec{a} + \vec{b}u + \vec{c}u^2 + \vec{d}u^3$$

$$\begin{cases} x(u) = a_1 + b_1 u + c_1 u^2 + d_1 u^3 \\ y(u) = a_2 + b_2 u + c_2 u^2 + d_2 u^3 \\ z(u) = a_3 + b_3 u + c_3 u^2 + d_3 u^3 \end{cases}$$

Courbes polynomiales cubiques

- Interpolation de Hermite (suite)
  - La pente de la courbe **p** s'obtient en dérivant l'équation **p(u)** par rapport à *u*:

$$\vec{\mathbf{P}}(u) = \begin{bmatrix} x(u) & y(u) \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{k}}_0 + \vec{\mathbf{k}}_1 u + \vec{\mathbf{k}}_2 u^2 + \vec{\mathbf{k}}_3 u^3 \qquad \vec{P}(u) = \vec{a} + \vec{b}u + \vec{c}u^2 + \vec{d}u^3$$

$$\vec{\mathbf{P}}'(u) = \begin{bmatrix} x'(u) & y'(u) \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{k}}_1 + 2\vec{\mathbf{k}}_2 u + 3\vec{\mathbf{k}}_3 u^2 \qquad \vec{P}'(u) = \vec{b} + 2\vec{c}u + 3\vec{d}u^2$$

  - En appliquant les conditions frontières p_0, p_1, p_0' et p_1', on obtient un système de quatre équations et quatre inconnues:

$$\vec{\mathbf{P}}_0 = \vec{\mathbf{P}}(0) = \vec{\mathbf{k}}_0 \qquad \vec{P}_0 = \vec{P}(0) = \vec{a}$$

$$\vec{\mathbf{P}}_1 = \vec{\mathbf{P}}(1) = \vec{\mathbf{k}}_0 + \vec{\mathbf{k}}_1 + \vec{\mathbf{k}}_2 + \vec{\mathbf{k}}_3 \qquad \vec{P}_1 = \vec{P}(1) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

$$\vec{\mathbf{P}}_0' = \vec{\mathbf{P}}'(0) = \vec{\mathbf{k}}_1 \qquad \vec{P}_0' = \vec{P}'(0) = \vec{b}$$

$$\vec{\mathbf{P}}_1' = \vec{\mathbf{P}}'(1) = \vec{\mathbf{k}}_1 + 2\vec{\mathbf{k}}_2 + 3\vec{\mathbf{k}}_3 \qquad \vec{P}_1' = \vec{P}'(1) = \vec{b} + 2\vec{c} + 3\vec{d}$$

Courbes polynomiales cubiques

- Interpolation de Hermite (suite)
  - Ce système peut être remanié pour extraire les $\mathbf{k}_i$, ce qui donne:

$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{p}_0 \qquad \vec{a} = \vec{P}_0$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{p}_0' \qquad \vec{b} = \vec{P'}_0$$

$$\mathbf{k}_2 = 3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) - 2\mathbf{p}_0' - \mathbf{p}_1' \qquad \vec{c} = 3\vec{P}_0 + 3\vec{P}_1 - 2\vec{P'}_0 - \vec{P'}_1$$

$$\mathbf{k}_3 = 2(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) + \mathbf{p}_0' + \mathbf{p}_1' \qquad \vec{d} = 2\vec{P}_0 - 2\vec{P}_1 + \vec{P'}_0 + \vec{P'}_1$$

  - L'équation originale de **p** peut finalement être réécrite :

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(u) = \mathbf{p}_0\,(1 - 3u^2 + 2u^3) + \mathbf{p}_1\,(3u^2 - 2u^3) + \mathbf{p}_0'(u - 2u^2 + u^3) + \mathbf{p}_1'(-u^2 + u^3)$$

$$\vec{P}(u) = (1 - 3u^2 + 2u^3)\overrightarrow{p_0} + (3u^2 - 2u^3)\overrightarrow{p_1} + (u - 2u^2 + u^3)\overrightarrow{p'_0} + (-u^2 + u^3)\overrightarrow{p'_1}$$

  - et sous forme matricielle

$$Q(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{MH}} \underbrace{\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_0' \\ p_1' \end{bmatrix}}_{\text{GH}}$$

    - M_H : matrice des coefficients de Hermite
    - G_H : Vecteur des contraintes géométrique de Hermite

Courbes polynomiales cubiques

- Interpolation de Hermite (suite)
  - Ce système peut être remanié pour extraire les **a,b,c,d**, ce qui donne:

$$\vec{a} = \vec{P}_0$$

$$\vec{b} = \vec{P'}_0$$

$$\vec{c} = 3\vec{P}_0 + 3\vec{P}_1 - 2\vec{P'}_0 - \vec{P'}_1$$

$$\vec{d} = 2\vec{P}_0 - 2\vec{P}_1 + \vec{P'}_0 + \vec{P'}_1$$

  - L'équation originale de **p** peut finalement être réécrite :

$$\vec{P}(u) = (1 - 3u^2 + 2u^3)\overrightarrow{p_0} + (3u^2 - 2u^3)\overrightarrow{p_1} + (u - 2u^2 + u^3)\overrightarrow{p'_0} + (-u^2 + u^3)\overrightarrow{p'_1}$$

  - et sous forme matricielle
    - M_H : matrice coeff. Hermite
    - G_H : Vecteur contraintes géométrique de Hermite

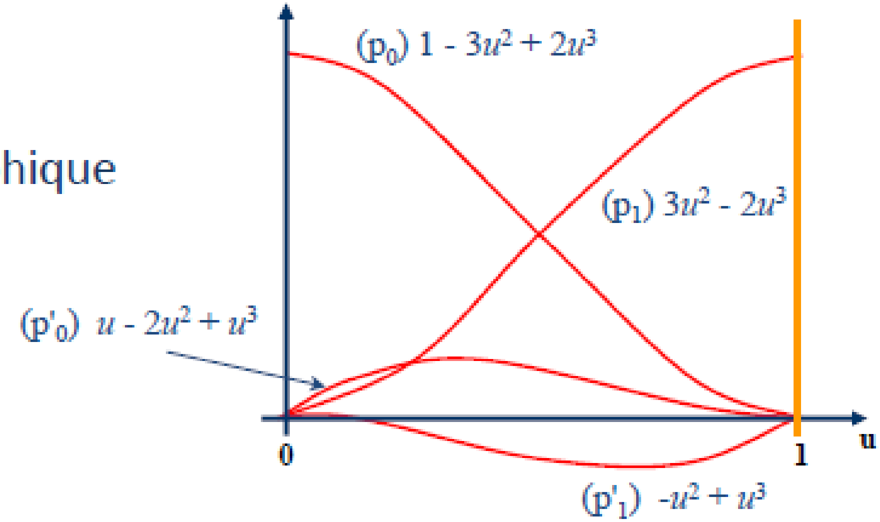
$$\vec{P}(u) = \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{MH}} \underbrace{\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p'_0 \\ p'_1 \end{bmatrix}}_{\text{GH}}$$

Courbes polynomiales cubiques

- Interpolation de Hermite (suite)
  - L'équation obtenue est la somme de quatre fonctions en *u* multipliées par les conditions frontières p_0 , p_1, p_0' et p_1' :

$$\vec{P}(u) = (1-3u^2+2u^3)\overrightarrow{p_0} + (3u^2-2u^3)\overrightarrow{p_1} + (u-2u^2+u^3)\overrightarrow{p'_0} + (-u^2+u^3)\overrightarrow{p'_1}$$

  - Ces fonctions s'appellent les *fonctions d'influence* (*blending functions*)
  - Leur représentation graphique est illustrée ici



Courbes polynomiales cubiques

- Interpolation de Hermite (suite)
  - Les *fonctions d'influence* ou *fonctions de base* sont un concept fondamental en CAO
  - Les *fonctions d'influence* seront appliquées à d'autres types de courbes
  - Ces fonctions représentent le long de l'intervalle de *u*, l'influence respective des conditions frontières :
    - Points de départ et d'arrivée
    - Pentes aux points de départ et d'arrivée
  - Exercice :

    Déterminer l'équation polynômiale cubique pour les contraintes de Hermite suivantes:

    $\mathbf{p_0} = (1,1,1)$; $\mathbf{p_1} = (2,3,0)$; $\mathbf{p_0}' = (1,1,1)$; $\mathbf{p_1}' = (1,1,0)$

$$\vec{P}(u) = \vec{a} + \vec{b}u + \vec{c}u^2 + \vec{d}u^3$$

$$\vec{P}(u) = (1 - 3u^2 + 2u^3)\overrightarrow{p_0} + (3u^2 - 2u^3)\overrightarrow{p_1} + (u - 2u^2 + u^3)\overrightarrow{p'_0} + (-u^2 + u^3)\overrightarrow{p'_1}$$

Courbes polynomiales cubiques

- Interpolation de Hermite (suite)
  - Exercice :

    Déterminer l'équation polynômiale cubique pour les contraintes de Hermite suivantes:

    $\mathbf{p_0} = (1,1,1)$; $\mathbf{p_1} = (2,3,0)$; $\mathbf{p_0'} = (1,1,1)$; $\mathbf{p_1'} = (1,1,0)$

$$\vec{P}(u) = \vec{a} + \vec{b}u + \vec{c}u^2 + \vec{d}u^3$$

$$\vec{P}(u) = (1-3u^2+2u^3)\overrightarrow{p_0} + (3u^2-2u^3)\overrightarrow{p_1} + (u-2u^2+u^3)\overrightarrow{p'_0} + (-u^2+u^3)\overrightarrow{p'_1}$$

$$x(u) = (1-3u^2+2u^3) + 2(3u^2-2u^3) + (u-2u^2+u^3) + (-u^2+u^3) \qquad x(u) = 1+u+2u^3$$

$$y(u) = (1-3u^2+2u^3) + 3(3u^2-2u^3) + (u-2u^2+u^3) + (-u^2+u^3) \qquad y(u) = 1+u+3u^2-2u^3$$

$$z(u) = (1-3u^2+2u^3) + (u-2u^2+u^3) \qquad z(u) = 1+u-5u^2+3u^3$$

$$\vec{P}(u) = \begin{bmatrix} x(u) & y(u) & z(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Courbes polynomiales cubiques

- Exercice
  - Soit les points
    - P1 (1,1)
    - P2 (6,5)
  - et les vecteurs tangents
    - P1' (0,4)
    - P2' (4,0)
  - Déterminer les équations paramétriques de la courbe
  - Calculer les coordonnées du point à u = 0.5
  - Tracer la courbe à l'aide des trois points et des deux tangentes

Courbes polynomiales cubiques

- Solution:
  - Les indices sont changés de 0,1 à 1,2!
  - P1 (1,1)
  - P2 (6,5)
  - P1' (0,4)
  - P2' (4,0)
- Déterminer les équations paramétriques de la courbe

$$\vec{P}(u)=(1-3u^2+2u^3)\vec{p_1}+(3u^2-2u^3)\vec{p_2}+(u-2u^2+u^3)\vec{p'_1}+(-u^2+u^3)\vec{p'_2}$$

$$x(u)=(1-3u^2+2u^3)+6(3u^2-2u^3)+4(-u^2+u^3) \qquad x(u)=1+11u^2-6u^3$$

$$y(u)=(1-3u^2+2u^3)+5(3u^2-2u^3)+4(u-2u^2+u^3) \qquad y(u)=1+4u+4u^2-4u^3$$

- Calculer les coordonnées du point à u = 0.5
  - X=3
  - Y=3.5
- Tracer la courbe à l'aide des trois points et des deux tangentes

Courbes polynomiales cubiques

- Exercice (suite)