Partie I . Analyse I .

Chapitre 1

I – Théorie des ensembles. Applications.

I théorie des ensembles.

Historique: Parmis les premiers fondateurs de la théorie des ensemble sont les deux Mathématiciens allemands Georg Cantor (1844 – 1916) et Richard Dedkind (1831 – 1916).

Définition: (Ensemble) Une Collection finie ou non finie denombrable ou non denombrables des objects distincts non nécessairement ordonnée dit ensamble.

× Exemple! L'ensemble des entiers naturels entre 3 et 7

$A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

Remarque: 1) La formule fondamentale est la suivante:

x appartient à X (x objet de l'ensemble X)

Par exemple: si $X = \{a, b\}$. On $a \in X$ mais $c \notin X$. (c n'appartient pas à X).

2) On dit que deux ensemble sont égaux si et seulement si On les mêmes éléments (Noton ici que un object de l'ensemble X dit élément de X)

(i.e) : si On a X et Y deux ensembles :

$$(X = Y) \Leftrightarrow (\forall x \ (x \in X \Leftrightarrow x \in Y))$$

Convention : On introduit par Convention la Notion de l'ensemble vide Noté ϕ ou $\{\}$ qui est l'unique ensemble sans éléments, Cet ensemble est Caractérisé Par : $\forall x : x \notin \phi$. aussi On a $(X = \phi) \Leftrightarrow (\forall x. x \notin X)$ qui est équivalent à $(X \neq \phi) \Leftrightarrow (\exists x \mid x \in X)$

Par exemple ($\mathbb{Z} \neq \phi$ Car $\exists 1 \in \mathbb{Z}$)

Dans La suite On supposera Connu les ensembles fondamentaux, $\mathbb{N}$. $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$,

aussi les I, l'intervalles. soient $a, b \in \mathbb{R}$.

les fermés :	les Ouverts	autre
$[a, b]$ borné	$]a, b[$	$[a, b[$
$[a, +\infty[$	$]-\infty, a[$	$]a, b]$
$]-\infty, a]$	$]a, +\infty[$	
$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$	$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$	
$\phi =]a, a[$	$\phi =]a, a[$	

Remarque : soit $I = (a, b)$ Un Intervalle Quelconque On Note $\mathring{I} =]a, b[$ dite Interieur de I et $\bar{I} = [a, b]$, dite fermuture de I.

Propriétés et opérations fondamentales

Définition: (inclusion), soient A et B Deux ensembles. A dit inclus dans B On bien A un sous-ensemble de B qui sente par $A \subset B$ si et seulement si tout élément de A soit dan B. (i,e) $(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Ce qui implique $(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A)$.

Exemple: 1) On a toujour $\phi \subset E$. et $E \subset E$ On bien ϕ fait partie de l'importe quelle ensemble E et même Chose pour E elle fait partie de lui même.

2) soit $X = \{1, 2, 4, 7, 9\}$. On a bien que $A = \{1, 2\}$ est inclus dans X. Car $\forall x \in A$. : $x \in X$. $1 \in X$ et $2 \in X$. Donc $A \subset X$.

Notation: On Note par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toute les sous-ensembles de l'ensemble (E)

Exemple $E = \{a, b\}$. Alors

$\mathcal{P}(E) = \{\phi, E, \{a\}, \{b\}\}$.

Définition: (Intersection), soient X et Y deux ensembles, les éléments qui sont en même temps dans X et Y, fait l'ensemble de l'intersection de X et Y. Noté $X \cap Y$, (i;e) $X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ et } x \in Y\}$

Ou bien $(x \in X \cap Y) \iff (x \in X \wedge x \in Y)$

si $X \cap Y = \emptyset$, On dit que X et Y sont disjoints.

Exemple: soit $A = \{1, 2, 3, a, b, c\}$ et soit $B = \{2, 4, 5, a\}$

Alors $A \cap B = \{2, a\}$. / $3 \notin A \cap B$ Car $(3 \notin B)$

Remarque: $(x \notin A \cap B) \iff (x \notin A \vee x \notin B)$

Définition: (Union ou Réunion), L'ensemble qui contenant les élément sont dans l'ensemble A ou dans l'ensemble B dite l'ensemble de l'Union de A et B Noté $A \cup B$. (i;e) $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Ou bien. $(x \in A \cup B) \iff (x \in A \vee x \in B)$

Exemple: $X = \{1, 4, 5\}$. $Y = \{a, b, c\}$. Alors

$X \cup Y = \{1, 4, 5, a, b, c\}$ / $6 \notin X \cup Y$ Car $6 \notin X \wedge 6 \notin Y$

Remarque On dit que $(x \notin A \cup B) \iff (x \notin A \wedge x \notin B)$

Proposition: soient A, B et C trois ensembles quelconque

- On a toujours $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$.
$A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$, $(A \cap B) \subset (A \cup B)$,
$A \cap A = A$, $A \cup A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$. $A \cup \emptyset = A$
$(A \cap B) = (B \cap A)$, $(A \cup B) = (B \cup A)$, $\emptyset \subset A$,
$(A \cup (B \cap C)) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
$(A \cap (B \cup C)) = ((A \cap B) \cup (A \cap C))$
$(A \cap (B \cap C)) = ((A \cap B) \cap C)$, $(A \cup (B \cup C)) = ((A \cup B) \cup C)$

Preuve: Par exemple $A \subset A \cup B$?!

Soit $x \in A$. On a lors $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
On $x \in A$ par definition de $A \cup B \Leftrightarrow x \in A \cup B$ Donc
Par la définition de l'inclusion $x \in A \cup B$.

aussi pour $(A \cap B) \subset (A \cup B)$.

Soit $x \in A \cap B \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} (x \in A \wedge x \in B)$
$\overset{\text{déf}}{\Rightarrow} x \in A \cup B$.

aussi pour $A \cap \emptyset = \emptyset$ On a. $\emptyset \subset A \cap \emptyset$
Par Convention il nous reste de Montrer que
$A \cap \emptyset \subset \emptyset$. Soit $(x \in A \cap \emptyset) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in \emptyset)$
mais $\emptyset$ ne Quontient auccun éllément Donc $x \in \emptyset$
D'où $A \cap \emptyset = \emptyset$.

<u>Définition</u> (Différence ensembliste).

Pour deux ensembles A et B, l'ensemble

<u>Noté</u> $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$. qui peut dire qu'il est l'ensemble des élément de qui ne sont pas dans B. (i.e) $(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$.

<u>aussi</u> On peut definire l'ensemble de la différence symetrique de A et B.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
$$= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

<u>Remarque:</u> appartir de la definition de Differences ensembliste On peut definie le Concept Complémentaire. Pour $B \subset E$, l'ensemble $E \setminus B$ dit Complémetaire de B dans E. Noté $C_E(B)$. Dans Ce Cas $(x \in C_E(B)) \Leftrightarrow (x \in E \text{ mais } x \notin B)$. Alors On a bien

<u>que</u> $B \setminus B = \emptyset$, $B \setminus \emptyset = B$, $B \cup C_E(B) = E$

$B \cap C_E(B) = \emptyset$; $C_E(C_E(B)) = B$

$C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$

$C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)$

<u>En effet,</u>

Exemple : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. $B = \{2, 3, 6, 7\}$

$A \setminus B = \{1, 4, 5\}$, $B \setminus A = \{6, 7\}$

$A \Delta B = \{1, 4, 5\} \cup \{6, 7\} = \{1, 4, 5, 6, 7\}$

soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 3\} \subset E$

$C_E(B) = E \setminus B = \{1, 4, 5, 6\}$.

Produit Cartésien

Definition : soient X et Y deux ensembles.
L'ensemble $X \times Y = \{(x, y) / x \in X \text{ et } y \in Y\}$
dit le produit Cartesien de X par Y.

Attention $\underset{\text{Couple}}{(x, y)} \neq \underset{\text{ensemble}}{\{x, y\}}$

On Note par $\Delta(X) = \{v = (x, x) / x \in X\}$

et $X^2 = X \times X$., aussi $X^n = \underbrace{X \times X \times X \times \dots \times X}_{n \text{ fois}}$

Exemple ! $X = \{1, 2\}$. $Y = \{a, b\}$

$X \times Y = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$

$Y \times X = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$

remarquons que $(1, a) \neq (a, 1)$.

Car $(x, y) = (x_1, y_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ \text{et} \\ y = y_1 \end{cases}$

Remarque : l'élément $(x, y) \in X \times Y$ s'appelle Couple. l'élément $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ s'appelle n-uplets..

Exemple : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ des points M de coordonnées (x, y) tel que que $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

Cardinal d'un ensemble :

Définition : soit X un ensemble fini, le nombre des éléments de X est appelé le Cardinal de X, qui se note par : $Card(X)$ ou $|X|$.

Par Convention : $Card(\phi) = 0$

Exemple : $X = \{a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4\}$, $Card(X) = 9$

Remarque : La notion de cardinal ne s'applique pas aux ensembles infinies par exemple. $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ .... ect.

II] Applications :

Définition : (Relation) :

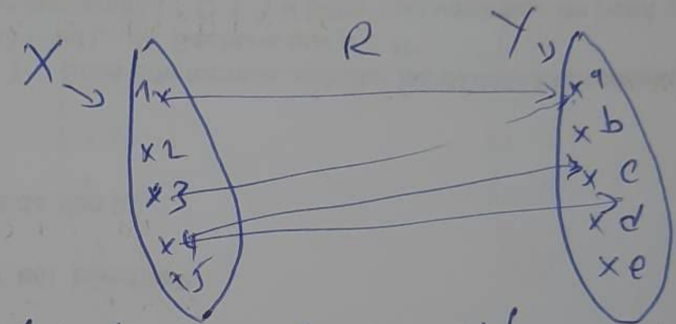
Soit un ensemble X et aussi un autre ensemble Y. une Relation entre les éléments de X et Y qui se note par $\mathcal{R}$ se définit par la donnée d'un sous-ensemble

$G_R \subset X \times Y$ appelé le graphe de R de sorte que $\forall (x,y) \in X \times Y, (x R y) \iff ((x,y) \in G_R)$. Ce que implique $G_R = \{(x,y) \in X \times Y : x R y\}$.

et dans le cas $X = Y$ on dira que R est une relation sur X.

__Exemple.__ Prenons $X = \mathbb{N}$ et on définit la relation $x R y \iff y$ divise x, On voit que $4 R 2$ parce que 2 divise 4, mais $5 \not R 2$ car 2 ne divise pas 5.

__Exemple:__ soit

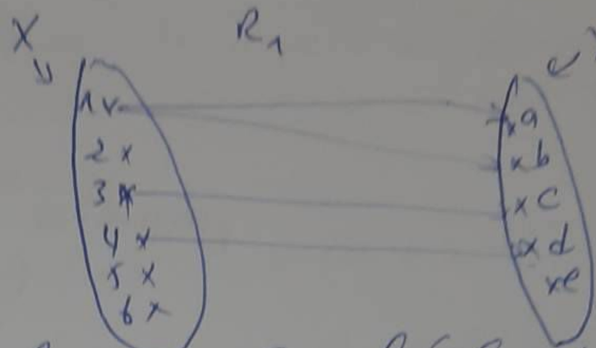


$$G_R = \{(1,a), (3,a), (4,c), (4,d)\} \subseteq X \times Y$$

Donc est le graphe de la relation R de X dans Y.

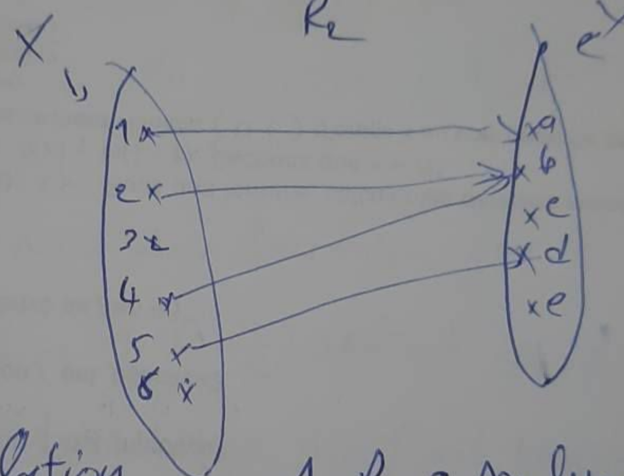
__Définition:__ __(fonction)__: soit R une relation de X dans Y (X et Y deux ensembles quelconque non vides), R dite fonction si et seulement si tout élément de X est en relation avec au plus un élément de Y. (i.e). $\forall x \in X$. $\exists y$ (au plus un) tel que $x R y$.

Exemple 1)



R_1 n'est pas une fonction car l'élément $x_0 = 1 \in X$ est en relation avec deux éléments de Y qui sont a et b.

2)



R_2 est une relation : $1 R_2 a$ seulement
($2 R_2 b$ seulement, 3 pas de relation. $4 R_2 b$ seulement)
$5 R_2 d$ seulement, 6 pas de relation.

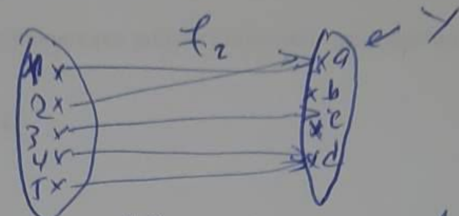
Donc on peut déduire que R_2 est une fonction

Définition : (ensemble de définition) D_f.

Si R entre X et Y est une fonction on peut noter par D_f, l'ensemble de définition de f est l'ensemble qui fait partie de X qui compte là dont les élément qui ont une image.

Exemple: 1) f_1 : $X \to$ 

f_1 est une fonction mais n'est pas une Application car les éléments (antécédents) 2 et 4 n'ont pas des Images ou bien $D_{f_1} = \{1, 3, 5\} \neq X$.

2) f_2 : $X \to$ 

$D_{f_2} = X$ D'où elle est une Application,

3) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ / g est une Application
$g(x) \longrightarrow x^2$ car $D_g = \mathbb{R} = X$.

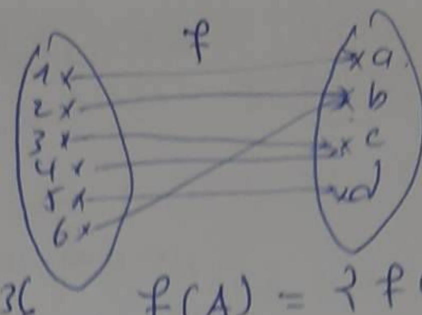
Notion: On désigne par X^Y ou $A(X, Y)$ l'ensemble de toutes les Applications de X dans Y.

Définition: soient X, Y et Z trois ensembles. soient les deux Applications $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$

La Composée de f et g notée $g \circ f$ est l'application définie comme suit

$$g \circ f : X \longrightarrow Z$$
$$x \longmapsto g \circ f(x) = g(f(x))$$

Exemple: soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \ln(x)$

$f:$ $X \to$ 

soit $A_1 = \{1, 2, 3\}$. $f(A_1) = \{f(x) \mid x \in A_1\}$
$= \{a, b, c\}$

soit $A_2 = \{1, 2, 6\}$. $f(A_2) = \{a, b\}$

soit $B_1 = \{a, b\}$. $f^{-1}(B_1) = \{x \in X \mid f(x) \in B_1\}$
$= \{1, 2, 6\}$

soit $B_2 = \{b, c\}$. $f^{-1}(B_2) = \{2, 6, 3, 4\}$

<u>Proposition</u>: soit $f: X \to Y$ une application soient A_1 et A_2 deux parties de X. On a.

-1- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

-2- $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

-3- si $(A_1 \subset A_2) \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$

Soient B_1 et B_2 deux parties de Y. On a.

-4- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

-5- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

-6- $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2) \Leftarrow$ (si $B_1 \subset B_2$)

<u>Preuve</u>: (T.D)

Remarque : C'est facile de Montrer que : si $A \subset X$ et $B \subset Y$. On a les Résultats : $f(X) \subset Y$, $f^{-1}(Y) = X$, $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$ et $f^{-1}(C_Y(B)) = C_X(f^{-1}(B))$

Preuve : Devoir. Par exemple on Montre

$A \subset f^{-1}(f(A))$;

Soit $x \in A \Rightarrow \underbrace{f(x)}_{y} \in f(A) = B$.

$\xRightarrow{\text{Par définition}} y \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in f^{-1}(f(A))$

aussi On peut voir pour $f(f^{-1}(B)) \subset B$?!

Soit $y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow (\exists x \in f^{-1}(B) \mid y = f(x))$

$\Rightarrow \underbrace{f(x)}_{y} \in B$. fin