.

Faculté des Mathématiques de l'Informatique
Département des mathématiques
Licence 3ième année

Module: Optimisation sans contraintes (2020/2021)

Cours 1: Ensembles convexes:

Remarque: Dans ce cours, on se place toujours dans l'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien défini par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

avec la norme euclidienne correspondante

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Définition: Soient $x_1, ..., x_m \in \mathbb{R}^n$, on appelle:
Combinaison convexe: Toute combinaison de la forme

$$\lambda x_1 + ... + \lambda x_m$$

où pour tout $1 \leq i \leq m : \lambda_i \geq 0$ et $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

Combinaison affine: Toute combinaison de la forme

$$\lambda x_1 + ... + \lambda x_m$$

où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

Combinaison Linéaire: Toute combinaison de la forme

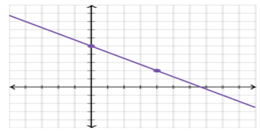
$$\lambda x_1 + ... + \lambda x_m$$

où $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Remarque 1: Dans le cas où $m = 2$ (c'est à dire combinaison de deux éléments) on a

$$\{\lambda_1 x + \lambda_2 y : \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0 \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 = 1\} = [x, y] \text{ le segment qui relie } x \text{ et } y$$

$$\{\lambda_1 x + \lambda_2 y : \lambda_1 + \lambda_2 = 1\} = (x, y) \text{ la droite qui passe par } x \text{ et } y$$



$$\{\lambda_1 x + \lambda_2 y : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \begin{cases} \text{La droite } (x, y) \text{ si } x \text{ et } y \text{ sont linéairement dépendants} \\ \text{Le plan passant par } x \text{ et } y \text{ si } x \text{ et } y \text{ sont linéairement indépendants} \end{cases}$$

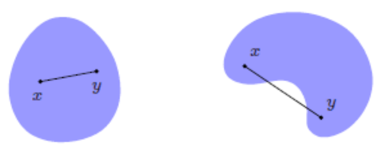
Remarque 2: La condition $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ peut s'écrire autrement si on pose $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$

$$0 \leq \lambda \leq 1 \ \lambda x + (1 - \lambda) \, y.$$

Définition. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un sous ensemble. On dit que C dit convexe dans $\mathbb{R}^n$ si

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda x + (1 - \lambda) y \in C.$$

Autrement dit si pour tous x, y dans C le segment $[x, y]$ est inclus dans C.



convexe non convexe

Exemple.
1. Les boules de $\mathbb{R}^n$, ouvertes ou fermées,

$$\begin{aligned} B\,(a, r) &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}\,; (\text{boule ouverte de centre } a \text{ et de rayon } r) \\ \overline{B}\,(a, r) &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}\,; (\text{boule fermée de centre } a \text{ et de rayon } r) \end{aligned}$$

sont des convexes de $\mathbb{R}^n$.
2. Tout espace vactoriel est convexe.

Proposition: Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un sous ensemble convexe, alors C contient toutes ses combinaisons convexes, i.e.,

$$\text{Pour tout } x_i \in C \text{ et } \lambda_i \geq 0 \ \ (1 \leq i \leq m) \ \text{ tels que } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$$

alors nous avons
$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m \in C.$$

Preuve:
Par récurrence sur m:
- La propriété est vraie pour deux éléments $m = 2$ (car C est convexe).
- Supposons que cette est vraie pour k éléments où $k < m$. Soient $x_1, ..., x_m \in C$ et $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}^+$ tels que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Donc, on peut suppose que $\lambda_m \neq 1$ (sinon on est dans une situation triviale)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i &= \lambda_m x_m + \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i x_i \\ &= \lambda_m x_m + (1 - \lambda_m) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{(1 - \lambda_m)} x_i \end{aligned}$$

Tout d'abord, par hypothèse $(m - 1 < m)$ on a

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{(1 - \lambda_m)} x_i \in C \text{ car } \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{(1 - \lambda_m)} = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i}{(1 - \lambda_m)} = \frac{(1 - \lambda_m)}{(1 - \lambda_m)} = 1.$$

D'où
$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = \lambda_m x_m + (1 - \lambda_m) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{(1 - \lambda_m)} x_i \in C.$$

Exercice: Montrer que l'intersection quelconque d'ensembles convexes est un ensemble convexe.

Déftnition. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. On appelle enveloppe convexe de A, notée $conv(A)$ l'intersection de tous les sous-ensembles convexes contenant A. C'est à dire $conv(A)$ est le plus petit ensemble convexe contenant A.

Remarque importante. Si B est convexe tel que $A \subset B$, alors on a $conv\,(A) \subset B$.

Proposition: Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. Alors,
1) $A \subset conv\,(A)$.
2) Si $A \subset B \Rightarrow conv\,(A) \subset conv\,(B)$.
3) $A = conv\,(A) \Leftrightarrow A$ est convexe.
4) $conv\,(conv\,(A)) = conv\,(A)$.
Preuve. Exercice à domicile.

Proposition. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Alors $conv(A)$ est égal à l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A, i.e.,

$$conv(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i : m \in \mathbb{N}^*, x_i \in A \text{ et } \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \text{ avec } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Preuve: On pose

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i : m \in \mathbb{N}^*, x_i \in A \text{ et } \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \text{ avec } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Il est facile de montrer que B est convexe et $A \subset B$. Alors

$$conv\,(A) \subset B.$$

Réciproquement, soit $x \in B$, alors x s'écrit comme combinaisons convexes d'éléments de A, ce qu'il montre que x est aussi dans $conv(A)$, c'est à dire

$$B \subset conv\,(A)\,.$$

Proposition. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Alors,

$$A \text{ est convexe } \Leftrightarrow xA + yA = (x+y)\,A \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n$$

Preuve. TD

Remarque. Si A n'est pas convexe l'inclusion $xA + yA \subset (x+y)\,A$ n'est pas vraie en général. Par exemple si $A = [-2,-1] \cup [1,2]$, alors

$$A + A = [-4, 4]$$

et

$$2A = [-4,-2] \cup [2,4].$$

Faculté des Mathématiques de l'Informatique
Département des mathématiques
Licence 3ième année

Série d'exercice N: 1

Exercice 1. Soit C un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$. Montrer que C stable par toutes ses combinaisons convexes.

Exercice 2. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x, y \in A \Rightarrow \frac{x+y}{2} \in A$$

1. Montrer par un exemple que A n'est pas forcément convexe.
2. Montrer que si de plus A est fermé, alors A est convexe.

Exercice 3. Soit A, B deux parties de $\mathbb{R}^n$. Alors,
1) $A \subset conv\,(A)$.
2) Si $A \subset B \Rightarrow conv\,(A) \subset conv\,(B)$.
3) $A = conv\,(A) \Leftrightarrow A$ est convexe.
4) $conv\,(conv\,(A)) = conv\,(A)$.

Exercice 4. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Alors,

$$A \text{ est convexe } \Leftrightarrow xA + yA = (x+y)\,A \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n$$