1 Les séries a termes quelconques

1.1 Les séries alternées:

Definition 1 *Toute série dont le terme générale est de la forme* $(-1)^n u_n$ *où* $u_n > 0$ *est dite série alternée.*

Theorem 2 *<<de Liebnietz>> si* u_n *est une suite décroissante et si* $\lim\limits_{n\infty} u_n = 0$ *alors* $\sum (-1)^n u_n$ *converge.*

Example 3 $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$, *on a* $u_n = \frac{1}{n}$ *elle est décroissantes et comme* $\lim\limits_{n\infty} \frac{1}{n} = 0$, *alors la série converge.*

Example 4 $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$, *on a* $u_n = \frac{1}{n^2+1}$ *elle est décroissantes et comme* $\lim\limits_{n\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$, *alors la série converge.*

Soit $\sum u_n$ une série dont le terme générale $u_n \in \mathbb{R}$.

Definition 5 *on dit que la série* $\sum u_n$ *converge absolument si la série* $\sum |u_n|$ *converge.*

Definition 6 *Si la série* $\sum |u_n|$ *converge et la série* $\sum u_n$ *diverge, alors la série* $\sum u_n$ *est dite simi convergente.*

Theorem 7 *toute série absolument convergente est une série convergente.*

Example 8 $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$. *comme* $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}\right| = \dfrac{1}{n^2+1} \overset{\infty}{\simeq} \frac{1}{n^2}$ *alors 'd'aprés Riemann la série* $\sum \frac{1}{n^2}$ *converge par conséquent* $\sum \dfrac{1}{n^2+1}$ *converge <<th d'équivalence>> converge, donc la série* $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$ *converge absolument <<cv abs>>*

Example 9 $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$, *comme* $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$ *et on sait que la série* $\sum \dfrac{1}{n}$ *diverge comme la suite* $u_n = \dfrac{1}{n}$ *est décroissante et* $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ *alors la série* $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$*est semi-convergente.*

Exercise 10 *Etudier la nature des séries suivante:*

$$1) \sum \frac{(-1)^n}{n \ln n},\ 2) \sum \frac{(-1)^n}{n!},\ 3) \sum \frac{(-1)^n}{n^2+n+3},\ 4) \sum \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right),\ 5) \sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$$