Université de Msila

Département de Mathématiques et d'Informatique

Série N: 02

(Les Suites Numériques)

1^{ier} Année L.M.D.(M.I)

Module: Analyse 01

A. U: 2020/2021

Remarque

l'exercice noté par $(*)$ ne sera pas corrigé dans le sience de TD

Exercice 1

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = 2, \quad u_{n+1} = 4u_n + 3, \text{ et } v_n = u_n + 1.$$

1. Calculer les termes u_1, u_2, v_0, v_1 et v_2.
2. Montrer que la suite (v_n) est géométrique, et calculer sa raison q.
3. Écrire v_n en fonction de n. Déduire le terme général de (u_n).
4. Étudier la nature de la suite (v_n).
5. Calculer les limites suinantes $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_0 + v_1 + ... + v_{n-1})$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_0 + u_1 + ... + u_{n-1})$.

Exercice 2

En utilisant la définition de la limite montrer que

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (4 + \frac{1}{n+2}) = 4.(*)$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1} = +\infty.$

Exercice 3

Calculer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} [(-1)^n + \frac{2}{n+1}]$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n})$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+2+...+n}{n+2} - \frac{n}{2}$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!}$, (indication: montrer que $n! > (\frac{n}{3})^n$)
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha^n+\beta^n}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*)$.

Exercice 4

Soit la suite de terme général $u_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$.

1. Montrer qu'il existe deux réels a, b tels que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 5

Étudier la monotonie des suites suivantes et on en déduire leur nature:

1.
   - a) $u_n = 1 + \frac{2}{n+1}$
   - b) $u_n = \frac{n^2+1}{2n+1}.(*)$
   - c) $u_n = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}$
   - d) $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$
   - e) $u_n = \frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^2}.(*)$
2. Les suites précédantes sont elle bornées?.$(*)$

Exercice 6

Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!},$$

sont adjacentes.

Exercice 7

On considère la suite (u_n), définie par $\begin{cases} u_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}. \end{cases}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \ 0 \leq u_n \leq 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. Conclure.

Exercice 8

1.
   - a) Montrer que la suite $u_n = \sum\limits_{k=2}^{k=n} \frac{1}{\ln k}$ n'est pas de Cauchy.
   - b) Que peut on conclure.
2. Montrer que la suite définie par $u_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \frac{\cos k}{k!}$ est une suite de Cauchy. En déduire sa convergence.$(*)$