Université de Mohammed Boudiaf, M'sila
Faculté des mathématiques
L2 (S3) : 2020/2021
Mr. Bougherara Brahim

Module : **Topologie des espaces métriques**

Table des matières

Chapitre I : Espaces métriques (cours 01)

1 Définitions, Propriétés et exemples fondamentales

Soit E un ensemble non vide.

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1. Une distance d sur E est une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait pour tout $x, y, z \in E$:

1. $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (Séparation)

2. $d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie)

3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (inégalité triangulaire).

Le couple (E,d) s'appelle espace métrique.

☞ **Exemple 1.1.** L'exemple fondamental d'un espace métrique est l'espace $\mathbb{R}$ avec la distance définie par d(x,y) = |x-y|. Cette distance s'appelle distance usuelle sue $\mathbb{R}$.

☞ Il est facile de vérifie que d est une distance. En effet, on a pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$

1. $d(x,y) = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x = y$.

2. $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$.

3. $d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y)$.

Deux propriétés importantes de la distance sont données par la proposition suivante :

Proposition 1.1. Soit (E,d) un espace métrique. Alors la distance d satisfait les deux propriétés suivantes :

a. La distance d est positive : $d(x,y) \geq 0, \quad \forall x, y \in E$.

b. Pour tout $x, y, z \in E$:

$$\boxed{|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y)} \tag{1.1}$$

Démonstration. a. Soient $x, y \in E$. En utilisant successivement les propriétés 1, 2, 3, on obtient

$$0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y).$$

D'où $d(x,y) \geq 0$.

b Soient $x, y, z \in E$. On a d'après 2 :

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

d'où par 2, on obtient

$$d(x,z) - d(z,y) \leq d(x,y).$$

En changeant le rôle entre x et y et par 2, on a

$$d(z,y) - d(x,z) \leq d(x,y).$$

On en déduit que

$$\boxed{|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y)}. \tag{1.2}$$

□

☞ Le nombre positive $d(x,y)$ s'appelle distance entre x et y ou distance de x à y.

☞ Pour vérifie que d est une distance, en générale seul, la propriété 3 qui pose un difficulté (parfois grande) contrairement aux propriétés 1 et 2 qui sont faciles à vérifier .

☞ **Exemple 1.2.** Soit $d : E \times E \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$\forall x, y \in E : d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

Montrons que d est une distance. Soient $x, y, z \in E$. On a

1 Si $x = y$ alors $d(x,y) = 0$ (par définition) et si $x \neq y$ alors $d(x,y) = 1 \neq 0$. D'où

$$d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y.$$

2 On a $d(y,x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y \neq x \\ 0 & \text{si} \quad y = x \end{cases} = d(x,y)$

3 • Si $x = y$ alors

$$0 = d(x,y) \leq \underbrace{d(x,z)}_{\geq 0} + \underbrace{d(x,z)}_{\geq 0}.$$

• Si $x \neq y$ alors $x \neq z$ ou $y \neq z$. D'où

$$1 = d(x,y) \leq \underbrace{d(x,z) + d(z,y)}_{=1 \vee 2}.$$

Dans les deux cas, on a : $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Donc d est une distance sur E. Elle s'appelle distance discrète.

1.2 Exemples de distances fondamentales

1.2.1 Distances sur $\mathbb{R}^n$

☞ **Exemple 1.3.** La distance notée d_1, est défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}^n : d_1(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|} \tag{1.3}$$

où $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_N) \in \mathbb{R}^n$ Vérifions que d_1 est bien une distance. On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$:

1 On a

$$\begin{aligned} d_1(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad |x_i - y_i| = 0, \ \forall i = 1, ...n. \\ &\Longleftrightarrow \quad x_i = y_i, \ \forall i = 1, ..., n. \\ &\Longleftrightarrow \quad x = y \end{aligned}$$

2 Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. On a

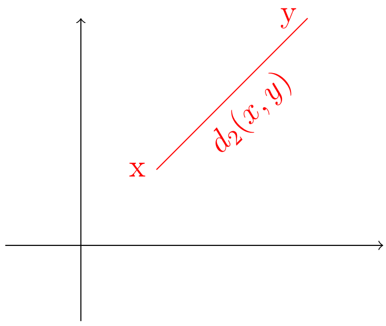
$$d_1(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d_1(y,x).$$

3 Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Vérifions l'inégalité triangulaire. On a

$$\begin{aligned} d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad &= \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i| \\ &\leq \quad \sum_{i=1}^{n} (|x_i - z_i| + |x_i - y_i|) \\ &= \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i| = d_1(x,z) + d_1(z,y). \end{aligned}$$

☞ **Exemple 1.4.** On définit sur $\mathbb{R}^n$ la distance usuelle (la distance euclidienne), notée d_2 par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : d_2(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2} \tag{1.4}$$



On vérifie que d_2 est une distance.

1 On a

$$d_2(x,y)=0 \Longleftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}=0 \quad \Longleftrightarrow \quad |x_i-y_i|^2=0,\ \forall i=1,\dots n.$$
$$\Longleftrightarrow \quad x_i=y_i,\ \forall i=1,\dots,n.$$
$$\Longleftrightarrow \quad x=y$$

2 Soient $x,y\in\mathbb{R}^n$. On a

$$d_2(x,y)\stackrel{\text{def}}{=}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i-x_i|^2\right)^{1/2}=d_2(y,x).$$

3 Pour montrer l'inégalité triangulaire, on utilise l'inégalité de Minkowski suivant : Pour tout $a=(a_1,\dots,a_n)$, $b=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^2\right)^{1/2}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{1/2}} \tag{1.5}$$

On a pour tout $x,y,z\in\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} d_2(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2} &= \left(\sum_{i=1}^{n}|(x_i-z_i)+(z_i-y_i)|^2\right)^{1/2}\\ &\stackrel{(1.5)}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i-y_i|^2\right)^{1/2}\\ &= d_2(x,z)+d_2(z,y). \end{aligned}$$

☞ **Exemple 1.5.** La distance notée d_∞, est défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\boxed{\forall x,y\in\mathbb{R}^n : d_\infty(x,y)\stackrel{\text{def}}{=}\max_{i=1}|x_i-y_i|} \tag{1.6}$$

Vérifions que d_∞ est bien une distance. On a pour tout $x,y\in\mathbb{R}^n$:

$\boxed{1}$ On a

$$d_\infty(x,y)=0 \Longleftrightarrow \max_{i=1}|x_i-y_i|=0 \quad \Longleftrightarrow \quad |x_i-y_i|=0,\ \forall i=1,...n.$$
$$\Longleftrightarrow \quad x_i=y_i,\ \forall i=1,...,n.$$
$$\Longleftrightarrow \quad x=y$$

$\boxed{2}$ Soient $x,y\in\mathbb{R}^n$. On a

$$d_\infty(x,y) \overset{\text{def}}{=} \max_{i=1}|x_i-y_i| = \max_{i=1}|x_i-y_i| = d_\infty(y,x).$$

$\boxed{3}$ Soient $x,y,z\in\mathbb{R}^n$. Vérifions l'inégalité triangulaire. On a

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y)=\max_{i=1}|x_i-y_i| &= \max_{i=1}|x_i-z_i+z_i-y_i| \\ &\leq \max_{i=1}(|x_i-z_i|+|x_i-y_i|) \\ &\leq \max_{i=1}|x_i-z_i|+\max_{i=1}|z_i-y_i| = d_\infty(x,z)+d_\infty(z,y). \end{aligned}$$

1.2.2 Distances sur $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$

Notons que $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues sur l'intervalle borné $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit sur cette espace les trois distances suivantes

$$\boxed{d_1(f,g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x} \tag{1.7}$$

$$\boxed{d_2(f,g)=\left(\int_a^b|f(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}} \tag{1.8}$$

$$\boxed{d_\infty(f,g)=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|} \tag{1.9}$$

pour tout $f,g\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. On vérifie que d_2 est une distance sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Les autres distances sont laissées à l'étudiant. Soient $f,g,h\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

$\boxed{1}$ On a :

$$d_2(f,g)=0 \Longleftrightarrow \int_a^b|f(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x=0 \quad \Longleftrightarrow \quad |f(x)-g(x)|=0, \quad \forall x\in[a,b]$$
$$\Longleftrightarrow \quad f(x)=g(x) \quad \forall x\in[a,b]$$
$$\Longleftrightarrow \quad f=g.$$

$\boxed{2}$ Pour la symétrie, c'est évidente.

3 Pour l'inégalité triangulaire, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz suivant

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_a^b |g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}, \ \forall f, g, \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}).} \tag{1.10}$$

On a

$$\begin{aligned}
{\color{red}d_2(f,g)^2} &= \int_a^b |f(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x = \int_a^b |(f-h)+(h-g)|^2\mathrm{d}x \\
&\leq \int_a^b (|f-h|+|h-g|)^2\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b |f-g|^2\mathrm{d}x + \int_a^b |h-g|^2\mathrm{d}x + 2\int_a^b |f-h||h-g|\mathrm{d}x \\
&\overset{(1.10)}{\leq} \int_a^b |f-h|^2\mathrm{d}x + \int_a^b |h-g|^2\mathrm{d}x + 2\left(\int_a^b |f-h|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_a^b |h-g|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\
&= \left(\left(\int_a^b |f-h|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} + \left(\int_a^b |h-g|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\right)^2 \\
&= {\color{red}(d_2(f,h)+d_2(h,g))^2}
\end{aligned}$$

Exercice 1. Est ce que d définit une distance sur $\mathbb{R}$ dans tous les cas suivants :

1 $|d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

2 $|d(x,y) = |x^2 - y^2|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

3 $d(x,y) = |\sin x - \sin y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit d une distance sur E. Posons $\delta = \frac{d}{1+d}$. Montrer que δ définit une distance sur E.

Exercice 3. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application injective et soit d une distance sur F. On pose

$$\delta(x,y) := d(f(x), f(y)), \quad \forall x, y \in E.$$

Montrer que δ est une distance sur E.

Exercice 4. Soit (E,d) un espace métrique. Soit $\varphi : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application croissante telle que

$$\varphi(0) = 0, \ \forall t > 0 : \varphi(t) > 0, \quad \forall t, s \geq 0 : \varphi(t+s) \leq \varphi(t) + \varphi(s), \ .$$

1 Démontrer que l'application $\varphi \circ d$ définit une distance sur E.

2 Déduire que les applications suivantes définissent des distances sur $\mathbb{R}$:

$$d^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1, \qquad \ln(1+d), \qquad \min\{1, d\}.$$

Chapitre I : Espaces métriques (cours 02)

2 Ouverts et fermés

2.1 Boule ouverte et fermée

On définit certains notions mathématiques, en s'inspirant de la géométrie euclidienne du plan et de l'espace.

Définition 2.1. Soient (E, d) en espace métrique, $a \in E$, $r > 0$.

1 La boule ouverte de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$\boxed{B(a,r) := \{x \in E : d(a,x) < r\}.}$$

2 La boule fermée de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$\boxed{\overline{B}(a,r) := \{x \in E : d(a,x) \leq r\}.}$$

3 La sphère de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$\boxed{S(a,r) := \{x \in E : d(a,x) = r\}.}$$

Exercice 5 (Très facile). *Montrer que* $\boxed{\overline{B}(a,r) = B(a,r) \cup S(a,r).}$ $\boxed{(a,r) = \overline{B}(a,r) \setminus B(a,r).}$

☞ **Exemple 2.1.** 1 Soit $E = \mathbb{R}$, muni de la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$ On a montré que d est une distance sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} B(a,r) := \{x \in \mathbb{R} : d(a,x) < r\} &= \{x \in \mathbb{R} : |x-r| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -r < x-a < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : a-r < x < a+r\} \\ &=]a-r, a+r[\end{aligned}$$

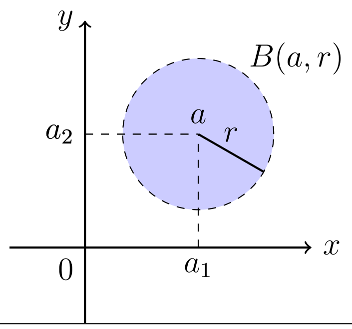
De la même façon, on obtient la boule fermée $\overline{B}(a,r) = [a-r, a+r]$. Pour la sphère, on a

$$S(a,r) = \overline{B}(a,r) \setminus B(a,r) = []\setminus][= \{a-r, a+r\}.$$

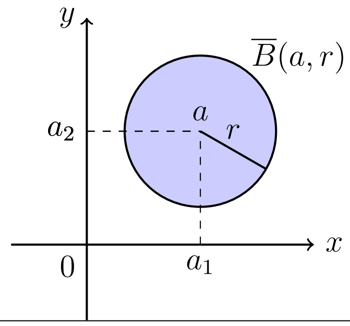
2 $E = \mathbb{R}^2$ avec la distance euclidienne $d_2(x,y) := \left((x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2\right)^{1/2}$. (ici, on a $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.) Alors, on a pour $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$B(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^2 : d_2(a,x) < r\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 < r^2\}$$

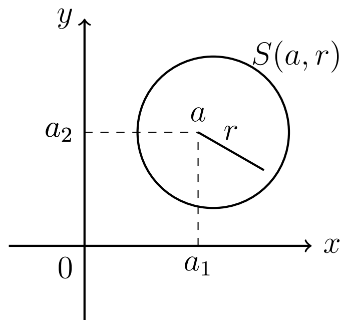
C'est le disque de centre a et de rayon r privée de sa frontière.



Boule ouverte $B(a,r)$ dans $\mathbb{R}^2$



Boule fermée $\overline{B}(a,r)$ dans $\mathbb{R}^2$

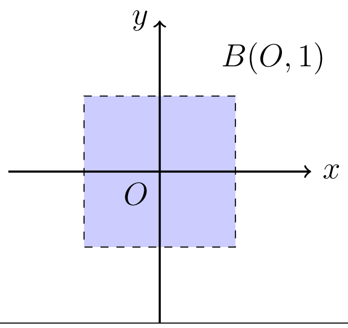


La sphère dans $\mathbb{R}^2$

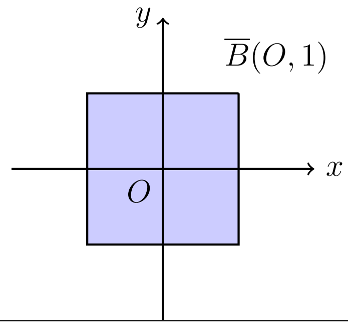
3 $E = \mathbb{R}^2$ avec la distance $d_\infty(x,y) := \max\{|x_1 - x_2|, |x_2 - y_2|\}$. Calculons la boule unité (de centre $O = (0,0)$ et de rayon 1).

$$\begin{aligned} B(O,1) &:= \{X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x-0|, |y-0|\} < 1\} && (2.1)\\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 \wedge |y| < 1\} && (2.2) \end{aligned}$$

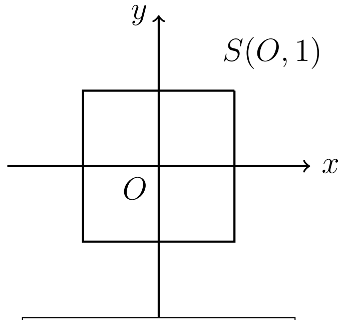
C'est le carré centré en O et de longueur de coté 2, comme la figure le montre :



Boule ouverte $B(a,r)$ dans $\mathbb{R}^2$



Boule fermée $\overline{B}(a,r)$ dans $\mathbb{R}^2$

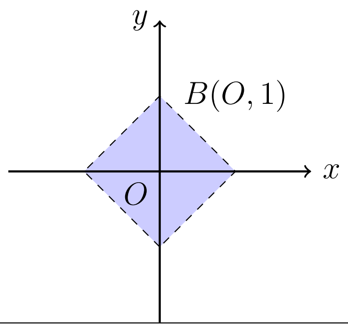


La sphère dans $\mathbb{R}^2$

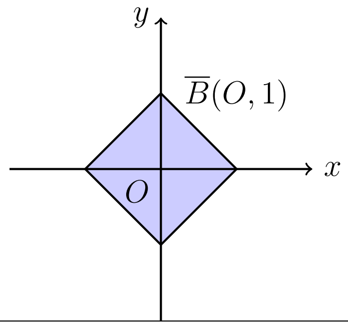
$\boxed{4}$ $E = \mathbb{R}^2$ avec la distance $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Calculons La boule unité (ouverte). On a

$$\begin{aligned} B(O,1) &:= \{(x,y) : |x-0| + |y-0| < 1\} = \{(x,y) : |x| + |y| < 1\} \\ &= \{(x,y) : x+y < 1 \wedge x-y < 1 \wedge -x+y < 1 \wedge -x-y < 1\}. \end{aligned}$$

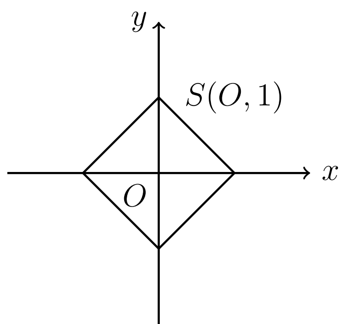
(ici, on a distingué les 4 cas : $x, y \geq 0$, $x \geq 0$, $y \leq 0$, $x \leq 0$, $y \geq 0$ et $x, y \leq 0$) On obtient donc un losange. et les figures suivantes montrent les boules ouverte et fermée et la sphère.



Boule ouverte $B(a,r)$ dans $\mathbb{R}^2$



Boule fermée $\overline{B}(a,r)$ dans $\mathbb{R}^2$



La sphère dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 6. *Soit (E,d) un espace métrique. Calculer la boule ouverte, fermé et la sphère (de centre a et de rayon $r > 0$) par rapport aux distances suivantes.*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & si \quad x \neq y \\ 0 & si \quad x = y \end{cases}, \quad \delta(x,y) = \ln(1 + d(x,y)), \quad \delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}.$$

Proposition 2.1. *Soit (E, d) un espace métrique.*

1 *La boule ouverte $B(a, r)$ satisfait la propriété suivante :*

$$\forall x \in B(a,r), \exists \varrho > 0 : B(x, \varrho) \subset B(a, r). \tag{2.3}$$

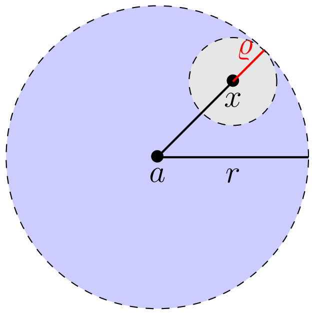
2 *A réunion des boules ouvertes si et seulement si*

$$\forall x \in A, \exists \varrho > 0 : B(x, \varrho) \subset A. \tag{2.4}$$

Démonstration. 1 Soit $x \in B(a, r)$.

Il suffit de choisir $0 < \varrho \leq r - d(a, x)$. En effet, on vérifie que $B(x, \varrho) \subset B(a, r)$. Soit $y \in B(x, \varrho)$. Montrons que $y \in B(a, r)$. Il suffit de montrer que $d(a, y) < r$. On a par l'inégalité triangulaire

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + \varrho = r.$$



2 On démontre les deux implications.

$\Longrightarrow$) Supposons que A est réunion des boules ouvertes. Alors

$$A = \bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i), \quad \text{où } I \text{ est un ensemble non vide.}$$

Montrons (2.4). Soit $x \in A$, Alors $\exists\ i \in I : x \in B(x_i, r_i) \subset A$ et d'après (2.3), $\exists\ \varrho > 0 : B(x, \varrho) \subset B(x_i, r_i)$. Par conséquent $B(x, \varrho) \subset A$.

$\Longleftarrow$) Supposons que (2.4) est satisfait et montrons que A est un réunion des boules ouvertes. A'après (2.4), $\forall x \in A : \exists\ r_x > 0 : B(x, r_x) \subset A$. D'où

$$\bigcup_{x \in A} B(x, r_x) \subset A.$$

D'autre part, on a

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} B(x, r_x).$$

On en déduit que $A = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$ (c'est un réunion des boules ouvertes). CQFD.

$\square$

2.2 Ouverts et fermée, Adhérence, intérieur et frontière

La proposition précédente motive la définition suivante

Définition 2.2 (ouvert, fermé). Soit (E, d) un espace métrique et soit $A \subset E$.

a On dit que A est un ouvert s'il est réunion de boules ouvertes (ou s'il satisfait la propriété (2.4)).

b On dit que A est fermé si son complémentaire est ouvert.

On a besoin de cette notion de distance entre un élément x et un ensemble A.

Définition 2.3. Soient (E, d) un espace métrique, $x \in E$ et A une partie non vide de E. On appelle distance de x à A le nombre positive

$$\boxed{d(x, A) := \inf_{\{y \in A\}} d(x, y) := \inf\{d(x, y) : y \in A\}. \qquad (2.5)}$$

Remarque 2.1. *a* *Si $x \in A$ alors $d(x, A) = 0$. En effet*

$$0 \leq d(x, A) := \inf_{\{y \in A\}} d(x, y) \leq d(x, x) = 0.$$

b *Si $A = \phi$, alors on prolonge la définition en posant $d(x, A) = +\infty$.*

Exercice 7. *Soit A un ensemble non vide d'un espace métrique (E, d). Montrer que*

$$\forall x, y \in E : |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y). \tag{2.6}$$

Définition 2.4. Soient (E, d) un espace métrique et A une partie non vide de E.

1 L'adhérence de A, noté $\overline{A}$, est défini par

$$\boxed{\overline{A} := \{x \in E : d(x, A) = 0\}} \tag{2.7}$$

et un point de $\overline{A}$ s'appelle **point adhérent de A**.

2 L'intérieur de A, noté $\overset{\circ}{A}$, est l'ensemble défini par

$$\boxed{\overset{\circ}{A} := \{x \in A \ / \ \exists r > 0 : B(x, r) \subset A\}} \tag{2.8}$$

et un point de $\overset{\circ}{A}$ s'appelle **point intérieur de** A.

3 La frontière de A, noté $\mathsf{Fr}A$,est l'ensemble :

$$\boxed{\mathsf{Fr}A := \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}.} \tag{2.9}$$

La proposition suivante donne des propriétés très importantes à ces notions :

Proposition 2.2. Soient (E,d) un espace métrique et A est un ensemble non vide de de E. Alors :

$\boxed{1}$ $\overset{\circ}{A}$ est ouvert.

$\boxed{2}$ $\overline{A}$ est fermé.

$\boxed{3}$ $\overline{A}^{\ c} = \overset{\circ}{A^c}$ (le complémentaire de l'adhérence est égale à l'intérieur de complémentaire).

$\boxed{4}$ $\overset{\circ}{A}$ est le plus grande ouvert inclus dans A.

$\boxed{5}$ $\overline{A}$ est le plus petit fermé qui contient A.

Démonstration. $\boxed{1}$ Montrons que $\overset{\circ}{A}$ est ouvert. c'est à dire on montre que

$$\forall x \in \overset{\circ}{A}, \exists r > 0 : B(x,r) \subset \overset{\circ}{A}.$$

Soit $x \in \overset{\circ}{A}$. Alors, par définition, $\exists r > 0 : B(x,r) \subset A$. Montrons que $B(x,r) \subset \overset{\circ}{A}$. Soit $y \in B(x,r)$, d'où d'après (2.3) $\exists\ \varrho > 0 : B(y,\varrho) \subset B(x,r) \subset A$ et donc $y \in \overset{\circ}{A}$. Par conséquent $B(x,r)\overset{\circ}{A}$.

$\boxed{2}$ Il suffit de montrer que $(\overline{A})^c$ est ouvert. Soit $x \in (\overline{A})^c$. Alors $d(x,A) := r > 0$. c'est à dire

$$\forall y \in A : d(x,y) \geq d(x,A) = r \quad (\text{car } d(x,A) := \inf_{z\in A} d(x,z) \leq d(x,y)).$$

Ce qui implique $A \cap B(x,r) = \phi$. Montrons que $B(x,r) \subset (\overline{A})^c$. Soit $y \in B(x,r)$, alors d'après (2.3), $\exists\ \varrho > 0 : B(y,\varrho) \subset B(x,r)$. D'où $B(y,\varrho) \cap A = \phi$, c'est à dire

$$\forall z \in A : (y,z) \geq \varrho > 0.$$

Par conséquent $d(y,A) := \inf_{z\in A} d(y,z) \geq \varrho > 0$. D'où $y \notin \overline{A}$ et et donc $y \in (\overline{A})^c$. D'où $B(x,r) \subset (\overline{A})^c$. Donc $(\overline{A})^c$ est ouvert.

$\boxed{3}$ On a

$$\begin{aligned} x \in (\overline{A})^c \Longleftrightarrow d(x,A) > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \inf_{y\in A} d(x,y) := r > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall y \in A : d(x,y) \geq r \Longleftrightarrow \forall y \in A : y \notin B(x,r) \\ &\Longleftrightarrow \quad A \cap B(x,r) = \phi \Longleftrightarrow B(x,r) \subset A^c \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in \overset{\circ}{A^c}. \end{aligned}$$

D'où $(\overline{A})^c = \overset{\circ}{A^c}$.

$\boxed{4}$ Soit B un ouvert inclus dans A. Montrons que $B \subset \overset{\circ}{A}$. Soit $x \in B$. Comme B est un ouvert alors $\exists r > 0 : B(x,r) \subset B \subset A$. Donc $x \in \overset{\circ}{A}$. Donc $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.

$\boxed{5}$ Soit F un fermé qui contient A. Montrons que $\overline{A} \subset F$. On a $F^c \subset A^c$ et comme F^c est ouvert, d'après les deux point précédents $F^c \subset \overset{\circ}{A^c} = (\overline{A})^c$. Donc $\overline{A} \subset F$.

$\square$

Corollaire 2.3. Soient (E,d) un espace métrique et A est un ensemble non vide de de E. Alors :

$\boxed{1}$ (A est fermé)$\Longleftrightarrow A = \overline{A}$.

$\boxed{2}$ (A est ouvert) $\Longleftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$.

Démonstration. En exercice. $\square$

Exercice 8. *Soit (E,d) un espace métrique, où d est la distance discrète.*

1. *Calculer la boule ouvert et la boule fermé de centre de centre a et de rayon 1.*
2. *Calculer l'adhérence de $B(a,1)$.*
3. *conclure.*

Exercice 9. *Soit (E,d) un espace métrique et A est un ensemble non vide de E. Montrer que*

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \phi.$$