

Tutorials (TD) Series No2

Free oscillations of systems with one degree of freedom

Exercise No1

Compare between the natural pulsation of a  $k+m$  mechanical system and an LC electrical system.

We give:  $k = 100 \text{ N/m}$ ,  $m = 250 \text{ g}$ ,  $L = 0.1 \text{ H}$ ,  $C = 100 \text{ pF}$ .

التمرين الأول

قارن بين النبض الذاتي للنظام الميكانيكي  $k + m$  والنظام الكهربائي LC.  
يعطى:  $k = 100 \text{ N/m}$ ,  $m = 250 \text{ g}$ ,  $L = 0.1 \text{ H}$ ,  $C = 100 \text{ pF}$ .

Exercise No2

A vibratory system  $k + m$  (arranged horizontally), consisting of a mass  $m = 0.010 \text{ kg}$  and a spring  $k = 36 \text{ N.m}^{-1}$ . At time  $t = 0$ , we observe that the mass is at  $50 \text{ mm}$  from its equilibrium position in the right side and is still moving to the right with a speed of  $1.7 \text{ m.s}^{-1}$ . Calculate the frequency, amplitude, initial phase and energy of the system. A second system identical to the first one is vibrating with the same amplitude but with a phase advance of  $\pi/2$ , calculate the position and the speed at  $t=0$ . At what moment will it then pass through the equilibrium position?

التمرين الثاني

نظام  $k + m$  مهتز يتركب من كتلة  $m = 0.010 \text{ kg}$  ونابض  $k = 36 \text{ N.m}^{-1}$ . الجملة موضوعة بشكل أفقي. عند اللحظة الزمنية  $t = 0$  نلاحظ أن الكتلة تتلقى إزاحة مقدارها  $50 \text{ mm}$  إلى اليمين من وضع التوازن وتنتقل في نفس الإتجاه بسرعة  $1.7 \text{ m.s}^{-1}$ . أحسب التواتر والسعة والصفحة الابتدائية وكذا طاقة النظام. يؤدي نظام مماثل لسابقه اهتزازا بنفس السعة ولكن بتقدم  $\pi/2$  في الطور أحسب الانتقال و السرعة عند  $t = 0$ . في أي لحظة سيمر بعد ذلك بوضع التوازن؟

Exercise No3

- Simplify the system represented in Figure 1 by replacing the springs with an equivalent one  $k_e$  ( $k_1 = k_2 = k_3 = k$  et  $k_4 = 2k$ )
- Deduce the nature of movement and its natural pulsation  $\omega_0$ , which we ask to calculate knowing that  $m = 1 \text{ kg}$  and  $k = 150 \text{ N/m}$ .

التمرين الثالث

- بسط النظام المبين في الشكل 1 وذلك بإيجاد النابض المكافئ  $k_e$  ( $k_1 = k_2 = k_3 = k$  و  $k_4 = 2k$ ).
- استنتج طبيعة الحركة و النبض الطبيعي  $\omega_0$  لها ثم أحسبه إذا علمت أن  $m = 1 \text{ kg}$  و  $k = 150 \text{ N/m}$ .

Exercise No4

Find the simplified equivalent system of the system shown in fig.2, and then calculate its natural pulsation. We assume that the mass moves only vertically.

التمرين الرابع

جد النظام المبسط المكافئ للنظام الممثل في الشكل 2 ثم أحسب النبض الذاتي له. نقبل أن الكتلة تنتقل شاقوليا فقط.

Exercise No5

A point mass  $m$  is suspended by two identical stretched springs of free length  $l_0$  and stiffness constant  $k$  (fig.3). The set takes a horizontal position such that the two springs will have a length  $l_1$  (the weight of  $m$  is neglected compared to the tension force in the two springs)

- Calculate  $F_0$  the force exerted by each spring on  $m$ .
- If the mass  $m$  is shifted vertically by  $x$  from its equilibrium position so that each spring takes a length  $l$  corresponding to  $x$ , then find the tension force  $F$  as a function of  $x$ .
- Establish the equation of motion of the system in the case where  $x/l_1 \ll 1$  et  $l_0/l_1 \ll 1$ .

## التمرين الخامس

- نشدد كتلة نقطية  $m$  ما بين نابضين متمائلين (الطول الحر  $l_0$  وثابت المرونة  $k$ ) مع العلم أن النابضين مشدودين عند النهاية الأخرى كما يوضحه الشكل 3. في هذه الحالة يأخذ كل نابض طولاً مقداره  $l_1$ . إذا اعتبرنا أن ثقل الكتلة مهملاً أمام قوة الشد في النابضين فإن المجموعة تأخذ وضعاً أفقياً عند التوازن.
- أ- أحسب قوة الشد  $F_0$  التي يطبقها كل نابض على الكتلة  $m$ .
- ب- تتلقى الكتلة إزاحة شاقولية مقدارها  $x$ ، فيأخذ النابضين عندها الطول  $l$  الذي يوافق مقدار الإزاحة  $x$ . جد قوة الشد  $F$  بدلالة  $x$ .
- ت- جد المعادلة التفاضلية للحركة إذا اعتبرنا أن:  $l_0/l_1 \ll 1$  و  $x/l_1 \ll 1$

## Exercise No6

A rod of length  $l$  and negligible mass is articulated at point  $O$  and carrying at its free end a point mass  $m$ . At a distance  $a$  from  $O$  on the rod we attach vertically a spring of stiffness  $k$ , its other end is attached at a point  $A$  of a fixed frame (fig.4). At static equilibrium, the rod takes a horizontal position ( $\theta = 0$ )

- 1- At this position the spring is it extended or not? Deduce the equilibrium condition.
- 2- Establish the differential equation of weak oscillations and then deduce their period.

## التمرين السادس :

- تتم فصل ساق معدنية طولها  $l$  وكتلتها مهملة عند النقطة  $O$  وتحمل في نهايتها الطليقة كتلة نقطية  $m$ . نربط الساق عند النقطة التي تبعد بمقدار  $a$  عن  $O$  بنابض شاقولي ثابت مرونته  $k$  ومثبت بنهايته الأخرى بمسند ثابت  $A$  (fig.4). عند التوازن السكوني تأخذ الساق وضعاً أفقياً ( $\theta=0$ )
- 1- هل النابض في هذا الوضع مستطيلاً أو مرتخياً؟ استنتج شرط التوازن.
  - 2- جد المعادلة التفاضلية للاهتزازات صغيرة السعة ثم استنتج الدور.

## Exercise No7

A U-shaped tube of section  $S$  contains a liquid of density  $\rho$  and length  $l$  in the tube (fig.5)

- 1- Establish the differential equation for free vibrations with weak amplitudes
- 2- Deduce their own natural pulsation

## التمرين السابع:

- يحتوي أنبوب معقوف على شكل حرف U ومساحة مقطعه  $S$ ، على سائل كتلته الحجمية  $\rho$  وطوله في الأنبوب  $l$  (الشكل 5). أدرس الاهتزازات صغيرة السعة للسائل وذلك بإيجاد المعادلة التفاضلية والنبض الذاتي لها.

