Exercise 1

Montrer que les opérateurs énumérés sont linéaires bornés. Chercher leurs normes

a) $A : C[0, 1] \to C[0, 1], \qquad Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau$;

b) $A : C[-1, 1] \to C[0, 1], \qquad Ax(t) = x(t)$;

c) $A : C[0, 1] \to C[0, 1], \qquad Ax(t) = t^2 x(0)$;

d) $A : C[0, 1] \to C[0, 1], \qquad Ax(t) = x(t^2)$;

e) $A : C^1[a, b] \to C[a, b], \qquad Ax(t) = x(t)$;

f) $A : C^1[a, b] \to C[a, b], \qquad Ax(t) = \frac{dx}{dt}$;

g) $A : L_2[0, 1] \to L_2[0, 1], \qquad Ax(t) = t \int_0^1 x(\tau)\, d\tau$;

Exercise 2

Montrer que les fonctionnelles suivantes sont linéaires continues et chercher leurs normes:

a) $\langle f, x\rangle = \int_{-1}^{1} tx(t)\, dt, \quad x \in C[-1, 1]$;

b) $\langle f, x\rangle = \int_{0}^{1} \iota x(t)\, dt, \quad x \in C^1[-1, 1]$;

c) $\langle f, x\rangle = \int_{-1}^{1} tx(t)\, dt, \quad x \in L_1[-1, 1]$;

d) $\langle f, x\rangle = \int_{-1}^{1} tx(t)\, dt, \quad x \in L^2[-1, 1]$;

e) $\langle f, x\rangle = \int_{0}^{1} t^{-1/3} x(t)\, dt, \quad x \in L^2[0, 1]$;

Exercise 3

Pour $x(t) \in L^2[-1, 1]$, posons

$$\langle f_n, x\rangle = \int_{-1}^{1} x(t) \cos n\pi t\, dt.$$

a) Montrer que f_n est une fonctionnelle linéaire bornée. Chercher $\| f_n \|$.

b) Montrer que $f_n \to 0$ $(n \to \infty)$ $*$-faiblement.

c) Est-ce que $f_n \to 0$ $(n \to \infty)$?

RÉPONSES ET INDICATIONS

Exercice 1

a) à f) $\| A \| = 1$. g) $\| A \| = 1\sqrt{3}$.

Exercice 2

a) $\| f \| = 1$. b) $\| f \| = 1/2$. c) $\| f \| = 1$. d) $\| f \| = \sqrt{2/3}$.

e) $\| f \| = \sqrt{3}$.

Exercice 3

a) La norme de fn est constante =1
b) ....utiliser l'intégration par parties.
c) Non, à cause de a).