RAPPEL SUR LE CALCUL VECTORIEL

1/ GRANDEUR SCALAIRE

Une grandeur scalaire est toujours exprimée par une valeur numérique suivie de l'unité correspondent .

Exemple :le volume, la masse, la température, la charge électrique, l'énergie…

2/ GRANDEUR VECTORIELLE

On appelle grandeur vectorielle toute grandeur qui nécessite un sens, une direction, un point d'application en plus de sa valeur numérique appelée intensité ou module .

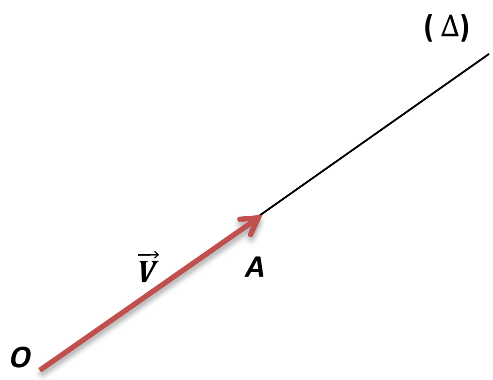
Exemple: le déplacement, la vitesse, la force, le champ électrique…

1-Notion de vecteur

1.1-Définition :

Un vecteur est une entité mathématique qui représente un élément d'un espace vectoriel $\mathbb{E}^3$

Associé à un espace affine (de points)$\mathbb{R}^3$, ou on définit une direction , un sens, un module et un point d'application .



- "$\boldsymbol{O}$" point d'application .
- "Δ" est la direction (ligne d'action)
- "$\|\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}\|$" (dans la base orthonormée $(\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}})$)

  $\|\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ Et le module du vecteur.
- De "$\boldsymbol{O}$" vers "$\boldsymbol{A}$" est le sens .

1.2- Types de vecteurs

a) *Vecteur libre:*

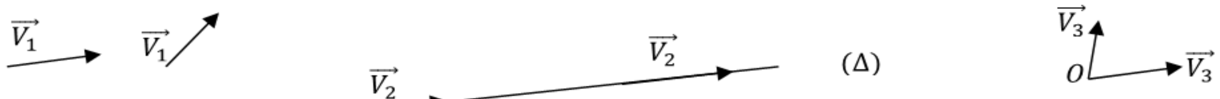
c'est un vecteur où le point d'application peut être transféré à n'importe quel point de l'espace .

b) *Vecteur glissant*:

c'est un vecteur où le point d'application peut être déplacer le long de sa ligne d'action .

C) *Vecteur lié:*

c'est un vecteur où le point d'application est fixe et définit par les coordonnées de sen origine.



Vecteur libre Vecteur glissant Vecteur lié

2- opération sur les vecteurs

2-1 somme de vecteurs :

Rapportée à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la somme de deux vecteurs est un vecteur , où les composante s'ajoutent à deux respectivement

$\vec{V_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ et $\vec{V_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

⇨ $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$

2-2La différence de deux vecteurs :

La différence de deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$et $\overrightarrow{V_2}$: $\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}$

est la somme du premier vecteur est l'opposé du second

$$\vec{V} = \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_1} + (-\overrightarrow{V_2})$$

2-3 Produit de vecteurs:

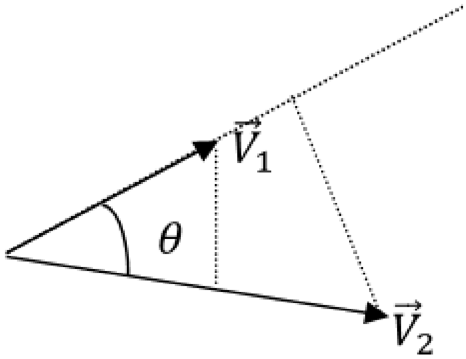
a) ***Produit scalaire et projection :***

le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$et $\overrightarrow{V_2}$, est un scalaire noté $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}$ que est égale à la somme des produits des composantes prisent deux à deux respectivement .

$$\overrightarrow{V_1} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V_2} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$$

⇨ => $\vec{V} = \overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = (x_1.x_2) + (y_1.y_2\,) + (z_1.z_2\,)$

Remarque : pour les vecteurs unitaires de la base orthonormée on a :



- ✓ $\vec{\imath}.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \vec{k}.\vec{k} = 1$
- ✓ $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\imath}.\vec{k} = \vec{\jmath}.\vec{k} = 0$

Le carré de module du vecteur est :

$$\vec{V}.\vec{V} = (x.x) + (y.y) + (z.z) = x^2 + y^2 + z^2 = V^2$$

=> $\|\vec{V}\| = V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

le produit scalaire peut être définit aussi de la maniéré suivante

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = \|\overrightarrow{V_1}\|.\|\overrightarrow{V_2}\|.\cos(\overrightarrow{V_1};\overrightarrow{V_2}) = \|\overrightarrow{V_1}\|.\|\overrightarrow{V_2}\|.\cos(\theta)$$

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_1} = \|\overrightarrow{V_1}\|.\|\overrightarrow{V_1}\|.\cos(\overrightarrow{V_1};\overrightarrow{V_1}) = {V_1}^2$$

Propriétés :

- ✓ le produit scalaire est commutatif : $\vec{V_1}.\vec{V_2} = \vec{V_2}.\vec{V_1}$
- ✓ le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition

  $\vec{V_1}.(\vec{V_2}+\vec{V_3}) = \vec{V_1}.\vec{V_2}+\vec{V_1}.\vec{V_3}$
- ✓ le produit scalaire représente géométriquement la projection d'un vecteur sur un autre

  $\vec{V}.\vec{i} = (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}).\vec{i} = x$

  $\vec{V}.\vec{j} = (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}).\vec{j} = y$

  $\vec{V}.\vec{k} = (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}).\vec{k} = z$

- le produit scalaire est nul si : $\|\vec{V_1}\| = 0$, $\|\vec{V_2}\| = 0$ ou $\vec{V_1} \perp \vec{V_2}$

b) Produit vectoriel et surface orientée :

le Produit vectoriel de deux vecteur $\vec{V_1}$et $\vec{V_2}$; est un vecteur noté $\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}$ et donné pare :

$$\vec{V_1}\wedge\vec{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

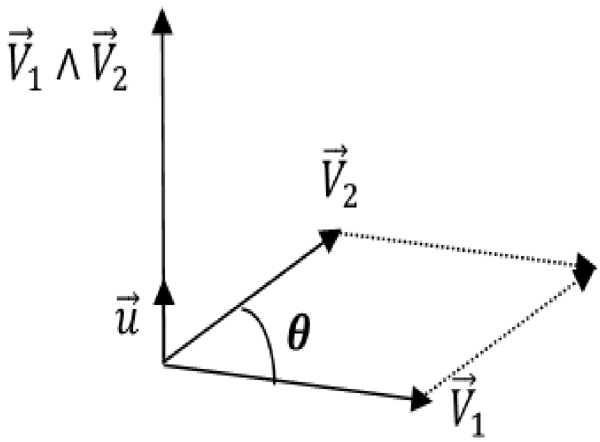
$$\boldsymbol{\vec{V_1}\wedge\vec{V_2} = (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}}$$

Et peut être définit aussi de la maniéré suivante

$$\boldsymbol{\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}} = \|\vec{V_1}\|.\|\vec{V_2}\|\sin(\vec{V_1};\vec{V_2})\vec{u}$$

$$\boldsymbol{\vec{V_1}\wedge\vec{V_2} = \|\vec{V_1}\|.\|\vec{V_2}\|.sin(\theta)\vec{u}}$$

$\vec{u}$: est un vecteur unitaire , $\vec{u}\perp\vec{V_1}$et $\vec{V_2}$



Propriétés:

- le produit vectoriel est non commutatif : $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = -\vec{V_2} \wedge \vec{V_1}$
- le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition

  $\vec{V_1} \wedge (\vec{V_2} + \vec{V_3}) = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} + \vec{V_1} \wedge \vec{V_3}$
- le vecteur résultant du produit vectoriel est toujours perpendiculaire aux vecteurs opérandes
- le produit vectoriel obéit à la permutation circulaire

  $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$

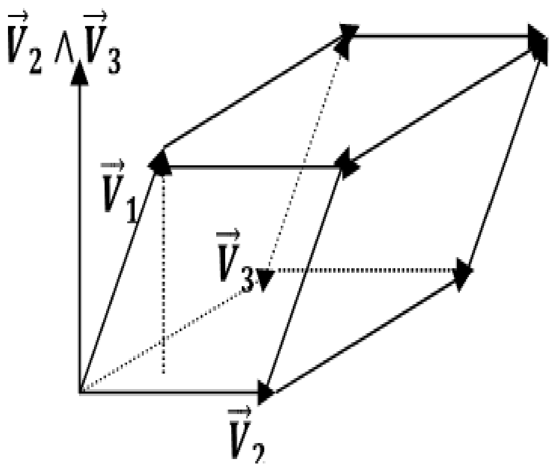
  $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ et $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$

  $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$
- le produit vectoriel est nul si : $\|\vec{V_1}\| = 0$, $\|\vec{V_2}\| = 0$ ou $\vec{V_1} \parallel \vec{V_2}$
- le produit vectoriel représente géométriquement l'aire de la surface orientée formée par les vecteurs opérandes .

c) *Produit mixte:*

le Produit mixte, est un scalaire définit par la relation suivante :

$$\vec{V_1}.(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = N$$



Propriétés:

-le Produit mixte est invariant par permutation cyclique

$$\vec{V_1}.(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = \vec{V_3}.(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}) = \vec{V_2}.(\vec{V_3} \wedge \vec{V_1})$$

-le Produit mixte est nul si : $\|\vec{V_1}\| = 0$, $\|\vec{V_2}\| = 0$, $\|\vec{V_3}\| = 0$;ou $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ $et \vec{V_3}$ sont coplanaires .

- le Produit mixte représente géométriquement le volume formé par les vecteurs opérandes.

2-4 Dérivée d'un vecteur :

Dans une base orthonormée cartésienne on exprime le vecteur $\vec{A}$ par :

$$\vec{A} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

S'il est variable , sa dérivée revient à dérivée ces composantes .

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

- ✓ la dérivée de la somme des vecteurs est égale à la somme des dérivées de ces vecteurs

$$\frac{d(\vec{A}+\vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt}$$

La dérivée du produit des vecteurs est égale à

$$\frac{d(\vec{A}\,.\,\vec{B})}{dt} = \vec{B}\,.\,\frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{A}\,.\,\frac{d\vec{B}}{dt}$$ pour le produit scalaire .

$$\frac{d(\vec{A}\wedge\vec{B})}{dt} = \vec{A}\wedge\frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt}\wedge\vec{B}$$ pour le produit vectoriel.

Exercice :

Dans une base orthonormée$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on donne les vecteur $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$

$\vec{A} = 2\,\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\,\vec{k}$ **et** $\vec{B} = 5\,\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ et $\vec{C} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$

a) Calculer les modules de $\vec{A}$ et. $\vec{B}$.

b) Calculer le produit scalaire ($\vec{A}\,.\,\vec{B}$) et le produit vectoriel($\vec{A} \wedge \vec{B}$)

c) Quel est l'angle formé entre les deux vecteurs.

d) Calculer le produit mixte $\vec{C}.(\vec{A} \wedge \vec{B})$

solution

a) modules de $\vec{A}$ et. $\vec{B}$: $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ et $\vec{B} = 5\,\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{14} \quad ; \quad \|\vec{B}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{30}$$

b) le produit scalaire : $\vec{A}\,.\vec{B} = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B$

$$\vec{A}\,.\vec{B} = 2.5 + 1.(-2) + 3.1 \;=>\; \vec{A}\,.\vec{B} = 11$$

le produit vectoriel :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix} = (y_A z_B - y_B z_A)\vec{i} - (x_A z_B - x_B z_A)\vec{j} + (x_A y_B - x_B y_A)\vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} \;=>\; \vec{A} \wedge \vec{B} = 7\vec{i} + 13\,\vec{j} - 9\,\vec{k}$$

c) l'angle formé entre les deux vecteurs :

on a : $\vec{A}\,.\vec{B} = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|\,\cos\theta \;=>\; \cos\theta = \frac{\vec{A}\,.\vec{B}}{\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|} \;=>\; \theta = Arc\cos\frac{11}{\sqrt{14}.\sqrt{30}}$

$=> \;\theta \cong 57.53^0$

On peut calculer θ de le produit vectoriel . : $\vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|\,\sin\theta\,\vec{u}$

d) le produit mixte $\vec{C}.(\vec{A} \wedge \vec{B})$: $\vec{C} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ $\quad \vec{A} \wedge \vec{B} = 7\vec{i} + 13\,\vec{j} - 9\,\vec{k}$

$$\vec{C}.(\vec{A} \wedge \vec{B}) = 1.7 + 2.13 + 1.(-9) = 24$$

$$\vec{C}.(\vec{A} \wedge \vec{B}) = 24$$

-Système de coordonnées

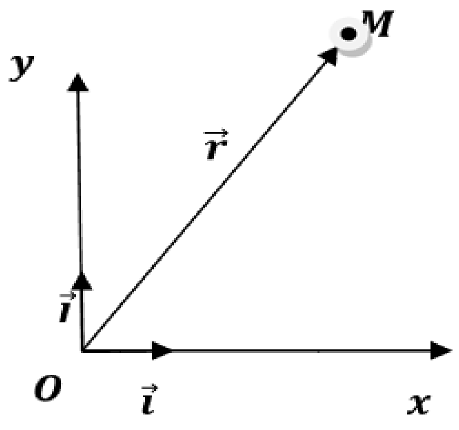
1-Représentation dans le plan

1-1 coordonnées cartésiennes $(x, y) \rightarrow (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Dans le plan on choisit une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où les coordonnées du point "M" sont (x, y)

$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

le module est : $\|\overrightarrow{OM}\| = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$



1-2 coordonnées polaires $(\rho, \theta) \rightarrow (\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta})$

Si on choisit une base locale $(\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta})$. "$\boldsymbol{O}$"choisit arbitrairement comme pole et $\overrightarrow{u_\rho}$ est orienté le long du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

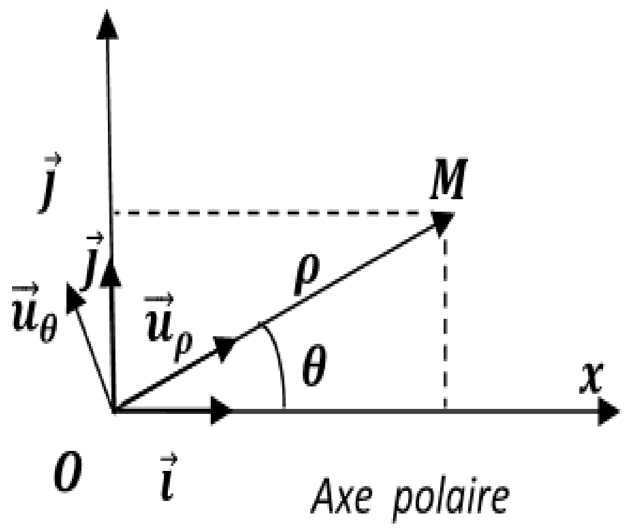
La direction qui passe par le pole "$\boldsymbol{O}$" c'est l'axe polaire , il est pris comme référence pour définir l'angle (la cordonnée)" $\boldsymbol{\theta}$".

$0 \leq \rho < +\infty$ $\qquad$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

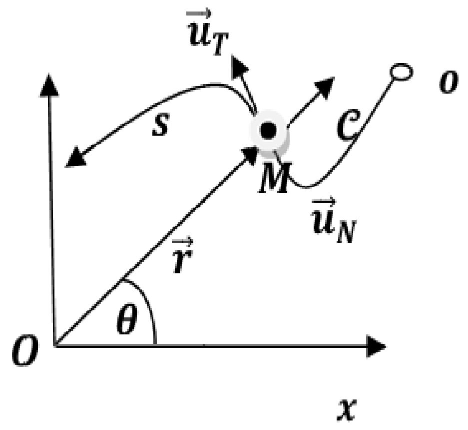
L'autre coordonnée "$\boldsymbol{\rho}$" est le module du vecteur $\overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho}$ $\quad$ le module est : $\|\overrightarrow{OM}\| = \rho$

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_\rho} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \end{cases}$$



1-3 coordonnée intrinsèques $(\overrightarrow{u_N}, \overrightarrow{u_T})$



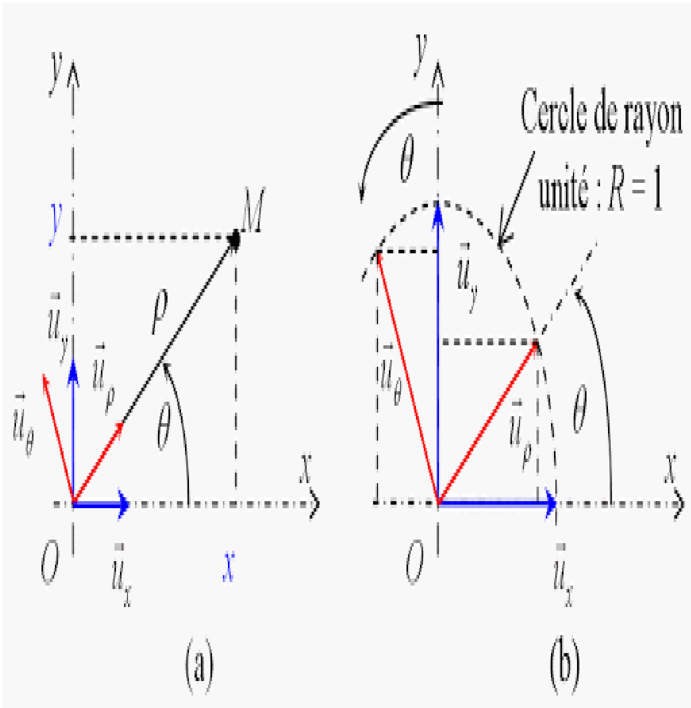
On ne peut représenter le point dans le système de coordonnée intrinsèques que si l'on connait la courbe "$\boldsymbol{C}$" de la trajectoire prise comme axe . Munit d'une origine ,la distance $\widehat{\boldsymbol{OM}}$ est notée "s". $\widehat{OM} = s$ et $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$

1-4 Relation entre les coordonnées des différents systèmes

En coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \vec{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{y}\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

En coordonnées polaires $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{\rho}\overrightarrow{\boldsymbol{u_\rho}}$



Si on fait un choit tels que l'axe polaire soit confondu

avec l'axe $\overrightarrow{ox}$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = \rho\overrightarrow{u_\rho} = \rho\cos\theta\vec{\imath} + \rho\sin\theta\vec{\jmath}$$

Par comparaison on aura

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arct\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\boldsymbol{u_\rho}} = \boldsymbol{\cos\theta}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{\sin\theta}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}} = -\boldsymbol{\sin\theta}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{\cos\theta}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}} \end{cases}$$

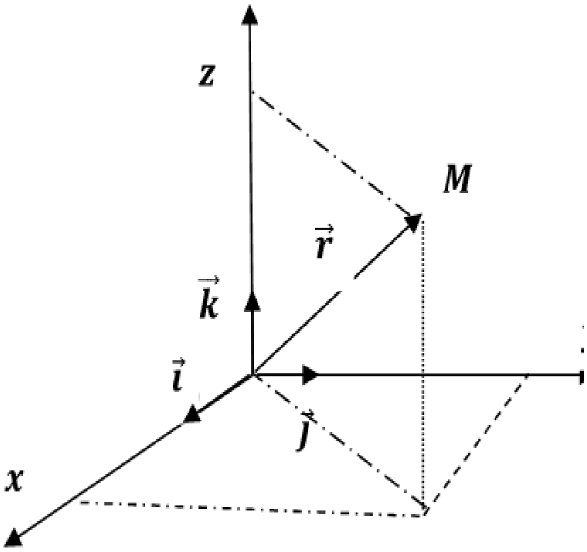
Remarque : il ne pas confondre les coordonnées polaires et les coordonnée intrinsèques .

2- Représentation dans l'espace

2-1 coordonnées cartésiennes $(x, y, z) \rightarrow (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

Dans l'espace on choisit une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

Les coordonnée du point "M" sont (x, y, z) tels que:



$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

Le module est $\|\overrightarrow{OM}\| = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

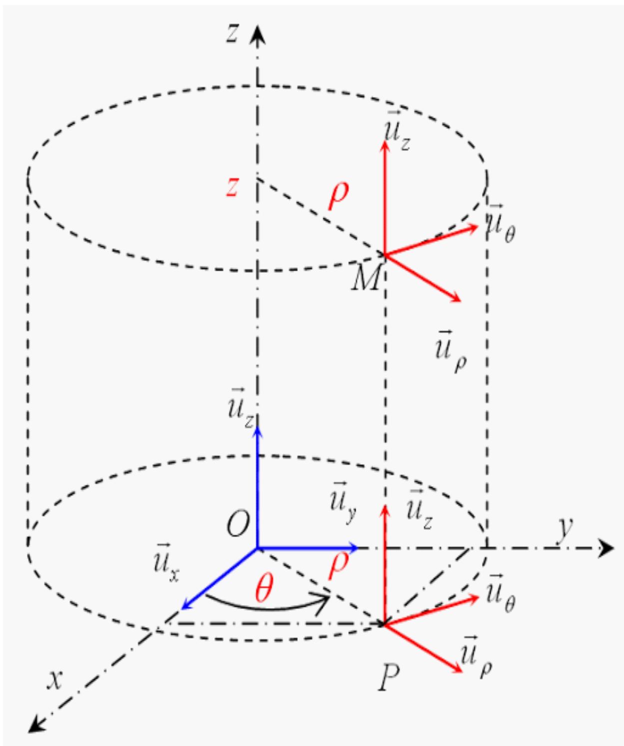
x est la projection de $\overrightarrow{OM}$ sur $\vec{\imath}$

y est la projection de $\overrightarrow{OM}$ sur $\vec{\jmath}$

z est la projection de $\overrightarrow{OM}$ sur $\vec{k}$

2-2 coordonnées cylindrique $(\rho, \theta, z) \rightarrow (\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta}, \vec{k})$

Le point "M" est repéré sure la surface d'un cylindre.



La projection de $\overrightarrow{OM}$, sur sa base est repérée pare (ρ, θ, z) .

$0 \leq \rho < +\infty$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ $0 \leq z < +\infty$

$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\vec{k}$

et le module

$\|\overrightarrow{OM}\| = \|\vec{r}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$

2-3 Relation entre les coordonnées cartésiennes et coordonnées cylindriques

En coordonnées cartésiennes $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

En coordonnées cylindriques $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\vec{k}$

de plus $\overrightarrow{u_\rho} = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arct\frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

2-4 Coordonnées sphériques $(r, \theta, \varphi) \rightarrow (\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$

-le point "M" est repéré sur la surface d' une sphère .

" θ" angle polaire : entre l'axe polaire pris arbitrairement et la direction $\overrightarrow{OM}$ où "O" et le centre de cette sphère .

- ✓ la projection $\overrightarrow{OM}$ sure le plant Equatorial est repérée par l'ongle azimutal " φ" par rapport à un axe de direction arbitraire dans ce plan .

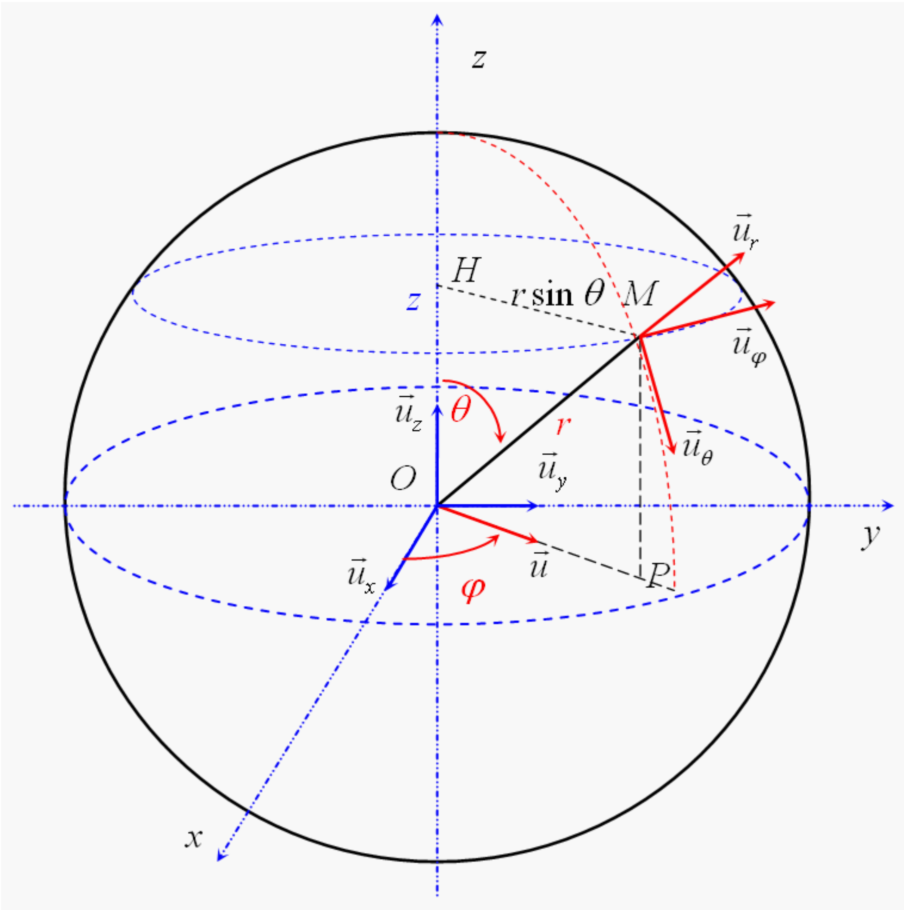
$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \|\vec{r}\| \ \overrightarrow{u_r}$$

$0 \leq r < +\infty$ $\quad$ $0 \leq \theta \leq \pi$ $\quad$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$\overrightarrow{u_r}$: vecteur unitaire radial (dans la direction du rayon $\overrightarrow{OM}$)

$\overrightarrow{u_\theta}$: vecteur unitaire tangent au grand cercle (tous les cercles de rayon $\overrightarrow{OM}$)

$\overrightarrow{u_\varphi}$: vecteur unitaire tangent au parallèles (cercles parallèles à l'équateur)



2-5 Relation entre les coordonnées cartésiennes et coordonnées sphériques :

- ✓ En coordonnées cartésiennes $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$
- ✓ En coordonnées sphériques $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \|\vec{r}\|\ \overrightarrow{u_r}$

De plus $\overrightarrow{u_r} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}$

Donc:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi = arct\frac{y}{x} \\ \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \end{cases}$$