CHAP II TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION EN REGIME PERMANENT

النقل الحراري بالتوصيل في النظام المستقر (لا يتعلق بالزمن)

II.1 Conduction unidimensionnelle التوصيل احادي البعد

II.1.1 Expression du flux thermique

Supposons que le flux thermique traversant un mur d'une surface **S** et d'épaisseur **e** par conduction est unidirectionnelle en régime permanent suivant l'axe ox dans un milieu ***isotrope*** (λ=const) son conductivité est λ **,** (Figure1) **.**

Le flux thermique traversant par conduction une mince paroi d'épaisseur **dx** située à une distance ***x*** de la face (1) et dont les faces sont respectivement aux températures **T** et **T +dT,** est donné par la loi de **Fourier (voir CHAP1)**

$$\Phi = -\lambda . S \frac{dT}{dx} \qquad \text{(II.1)}$$

De cette relation on peut écrire :

$$\Phi . dx = -\lambda \, S . dT$$

Le régime est permanent (ne dépends pas de temps), **le flux thermique donc est constant**, donc on peut intégrer cette relation entre les deux faces, on obtient :

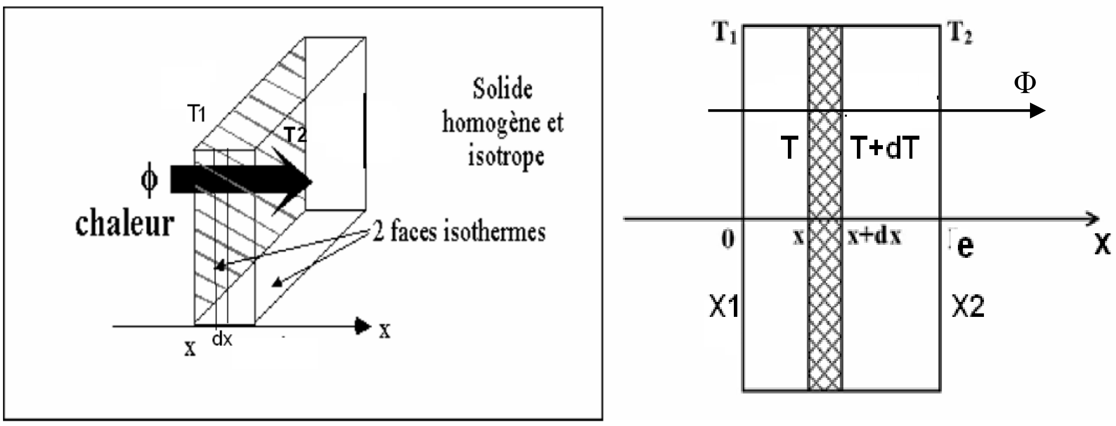


Figure.1 Conduction à travers un mur plan

$$\Phi \int_0^e dx = -\lambda . S \int_{T1}^{T2} dT \qquad \text{(II.2)}$$

ce qui donne :

$$\Phi . e = \lambda . S (T1 - T2)$$

D’où : l’expression **du flux thermique** est :

$$\Phi = \frac{\lambda S(T1 - T2)}{\mathrm{e}} \qquad \text{(II.3)}$$

II.1.2 Densité de flux thermique

Comme la densité de flux thermique (**q**) est le flux rapporté à l’unité de surface donc:

$$q = \frac{\Phi}{S} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{\lambda(T1 - T2)}{\mathrm{e}} \qquad \text{(II.4)}$$

II.1.3 Expression de la résistance thermique de conduction d'un mur plan

En électricité, **la résistance** est le rapport entre la différence de potentiel **ΔV** et le courant électrique **I**
(**R_{ele}= ΔV/I**). En thermique, **la résistance** thermique est le rapport entre la différence de température et **le flux thermique,** d’où l’expression suivante de **la résistance thermique est :**

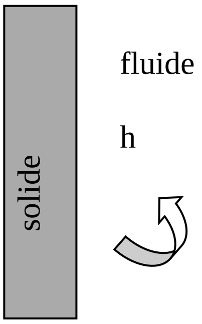
$$R_{the} = \frac{T1 - T2}{\Phi} \qquad \text{et} \qquad R_{élec} = \frac{V1 - V2}{I}$$

De la relation (II.3), la résistance thermique est donc : $R_{the} = \frac{\mathrm{e}}{\lambda S}$ (II.5)

II.1.4 Solide est en contacte avec un fluide

Dans ce cas; on utilise la loi de Newton :

$$\Phi = h.S.\Delta T \qquad \textbf{(loi de Newton)}$$



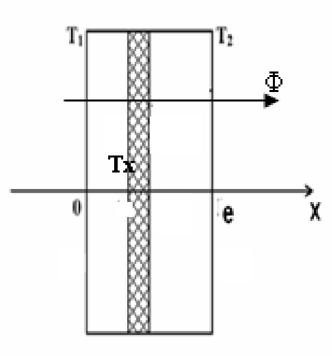
tel que :
h : coefficient de transfert thermique par convection ($W/m^2.K$)
S : surface d’échange entre le fluide et le corps solide
ΔT : différence de température entre le fluide et le solide

Dans ce cas, la résistance thermique est : $R_{the} = \frac{1}{\mathrm{h.S}}$ (II.6)

II.1.5 Expression de la température à l'intérieur de mur

De l'équation (II.2), on peut déterminer la température dans un point d'abscisse **x** (Tx):

$$\Phi \int_{0}^{x} dx = -\lambda . S \int_{T1}^{T(x)} dT$$



$T_1 - T_{(x)} = R_x . \Phi$, où $R_x = x / \lambda . S$

D'où : $T_x = T_1 - (\Phi / \lambda . S) . x$

T(x) est sous la forme : $T(x) = - ax+b$

On déduit que la température diminue linéairement entre les deux faces. La **chute** de température est d'autant plus grande que la conductivité thermique du matériau constituant le mur.

Application N° 1

Calculer le flux traversant une plaque d'une vitre de 20 cm de longueur, de 10 cm de largeur et de 5 mm d'épaisseur. La température de la face interne de la vitre est égale à 25°C, celle de la face externe est égale à 23° C.

En déduire la résistance thermique de la vitre et la densité de flux thermique.

on donne : conductivité thermique du verre: $\lambda v = 0,8\ W.m^{-1}.K^{-1}$

Réponse: Φ=6.4 w , R= 0.312 °C /w, q= 320 w/m²

II.1.6 Cas d'un mur simple en contacte avec deux fluides

Considérons un mur de surface S en contacte avec deux fluides de températures constantes T_{f1} et T_{f2} tel que T_{f1} est supérieur à T_{f2} et des coefficients d'échanges thermiques par convection h1 et h2 , Fig. (2) .

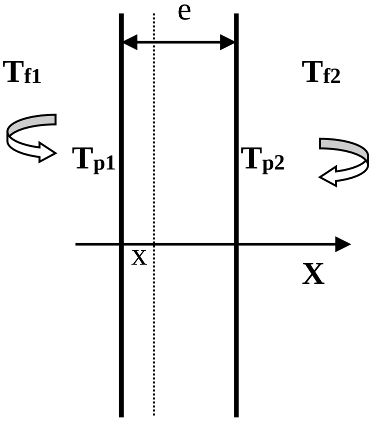


Fig.2: mur simple en contacte avec deux fluides

Entre les parois du mur et les fluides s'établit un échange convectif.
La conservation de flux se traduit par l'égalité des flux (Φ=Constante) donc :

$\Phi= \Phi1= \Phi2= \Phi3$ (a)

Tel que :

$\Phi1=h1.S.(T_{f1}-T_{p1})$: flux cédé par le fluide chaud au mur

$\Phi2=\lambda.S.(T_{P1}-T_{p2})/e$: flux traversant le mur

$\Phi2=h2.S.(T_{P2}-T_{F2})$: flux reçu par le fluide froid.

Ou:

$$T_{f1} - T_{p1} = \frac{\Phi}{h_1.s} \quad \text{(b)}$$

$$T_{P1} - T_{P2} = \frac{\phi.e}{\lambda.s} \quad \text{(c)}$$

$$Tp_2 - T_{f2} = \frac{\Phi}{h_2.s} \quad \text{(d)}$$

Et en additionnant les équations (b)→ (d) membre à membre on obtient :

$$\Phi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_{f1} + R + R_{f2}} \quad \text{(II.6)}$$

avec : $R_{f1}=1/h_1.S$, $R=e/\lambda.S$, $R_{f2}=1/h_2.S$

L'équation (II.6) permet d'exprimer le flux d'échange entre les deux fluides en fonction de leurs températures, et des caractéristiques du mur et des coefficients d'échange convectifs :

Cette relation traduit **la loi d'Ohm** pour des résistances en série.

II.1.7 Le Coefficient d'échange global :

On définit le **coefficient global d'échange k** entre une paroi solide et deux fluides par l'expression :

$$k = \frac{1}{R_{éq}.S} \quad \text{ou} \quad k = \frac{1}{(R_{f1} + R + R_{f2}).S} \quad \text{(II.7)}$$

Remplaçons l'équation (II.7) dans (II.6) on obtient:

$$\mathbf{\Phi=k.S.(T_{f1}-T_{f2})} \quad \textbf{(II.8)}$$

II.1.8 Plusieurs murs plans homogènes, en série en contacte avec deux fluides

Considérons maintenant plusieurs murs simples accolés, d'épaisseur e_i et de conductivité λ_i, en contacte parfaite. Les faces extrêmes sont en contacte avec deux fluides de températures T_{f1} et T_{f2} (Fig.3).

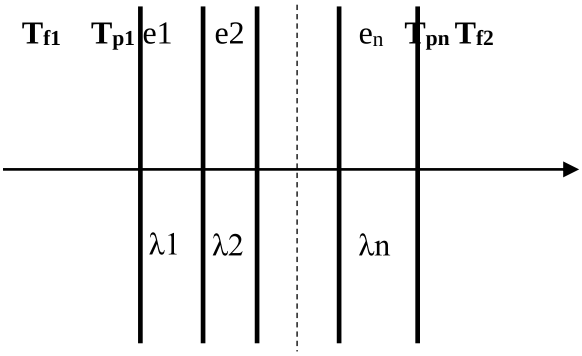


Fig.3: plusieurs murs accolés

Par un raisonnement identique au précédent (mur simple) on obtient de même :

$$\Phi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_{f1} + \sum_{i=1}^{n} R_i + R_{f2}} \quad \text{avec} \quad R_i = \frac{e_i}{\lambda_i . S} \quad \text{et} \quad R_f = \frac{1}{h_f . S}$$

(II.9)

Application N° 2

Le mur d'un four est composé de deux couches. La première est en brique réfractaire d'épaisseur
e1= 24cm , conductivité λ1=1.2 W/(m°C), la deuxième est en brique isolante e2= 10cm , conductivité λ2=0.2 W/(m°C).

La température à l'intérieure du four est T1 est de 1500°C et le coefficient d'échange h1 sur la paroi intérieure vaut 50 W/(m°C) . La température à l'extérieure (air ambiant) est T2 est de 20 °C et le coefficient d'échange h2 sur la paroi extérieure est 25 W/(m°C) .

1. Déterminer la densité de flux thermique (perte thermique) entre l'intérieure et l'extérieure du four.
2. Déterminer la température de la paroi interne et la température entre les deux couches.
3. Déterminer le coefficient d'échange global K
4. Déterminer la température située à une distance **x** dans la première couche.

Rép: $$q=\frac{\Phi}{S}=\frac{1}{S}.\frac{T_{f1}-T_{f2}}{R_{f1}+\sum_{i=1}^{n}R_i+R_{f2}}$$

1) $S.R_{tot}$=0.76 K.m^2/w , q=1947.36 w/m^2

2) T1=Ti-q/hi = 1461 C°, T2= T1-q.(e1/λ1)= 1071.53 C°

3) k= 1/$S.R_{tot}$ = 1.31 W/m^2.K

4) T(x)= 1461-1622.8.x

II.1.9 Conduction à travers plusieurs murs plans homogènes en parallèle

Supposons des différents éléments solides soient juxtaposés et que la température soit uniforme sur chacune de leurs deux faces (fig.4). (**exemple** : mur +fenêtre+porte ,ect..)
La différence de température **(T1-T2)** est donc la même pour chacun des éléments traversé respectivement par les flux thermiques **Φ1 , Φ2 , Φ3.** (Fig.4).

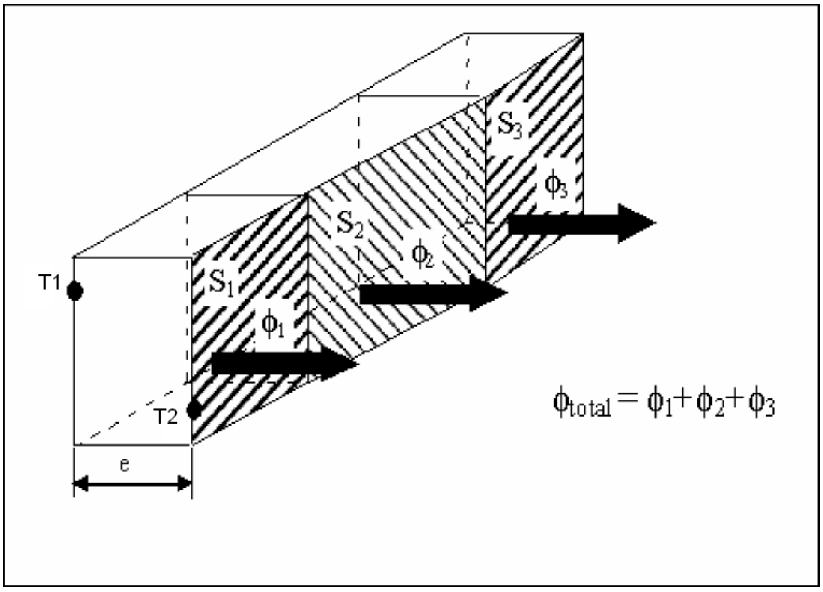


Fig. 4 plusieurs murs plans homogènes, en parallèle

Le flux thermique total à travers l'ensemble est:

$$\Phi=\Phi1+\Phi2+\Phi3$$

Si **R1, R2, R3** représentent les résistances thermiques de chacun des éléments, alors les flux traversant chaque mur sont donnés par:

$$\Phi1=\frac{T1-T2}{R1};\qquad \Phi2=\frac{T1-T2}{R2};\qquad \Phi3=\frac{T1-T2}{R3}$$

Avec :

$$R1 = \frac{e}{\lambda_1.S1}; \quad R2 = \frac{e}{\lambda_2.S2} \quad .; \quad R3 = \frac{e}{\lambda_3.S3}$$

$$\Phi = \Phi1 + \Phi2 + \Phi3 = (T1 - T2)\left[\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}\right] \qquad \text{(II.10)}$$

Si les différents éléments en parallèle n'ont pas la même épaisseur. Le raisonnement précédent s'applique à condition de pouvoir négliger les échanges thermiques par les faces latérales des bandes juxtaposées.

$$R_1 = \frac{e_1}{\lambda_1.S_1}; \quad R_2 = \frac{e_2}{\lambda_2.S_2} \quad .; \quad R_3 = \frac{e_3}{\lambda_3.S_3}$$

Application N° 3

Calculer le flux traversant une façade d'une maison de 14 m^2. Cette façade est constituée d'un mur de brique de 25 cm d'épaisseur. La façade est perçue de 2 fenêtres en vitre de 1 m^2 de surface de chaque fenêtre et de 4 mm d'épaisseur et une porte en bois de 4 mm d'épaisseur et de 2 m^2 de surface.
On suppose que la température interne est de 25 °C pour tous les matériaux constituant la façade , de même pour la température de la paroi externe est de 5°C.
Conductivité thermique du verre : λv=0.7 W/(m°C)
Conductivité thermique du brique : λb=0.5 W/(m°C)
Conductivité thermique du bois: λbois=0.20 W/(m°C)

Rép: R1= R_{mur}= 0.005, Rf= $1.14.10^{-2}$, Rp=0.01 , Φ=7754.38 W

II.2. Conduction à travers d'un tube cylindrique

On considère un cylindre creux de conductivité thermique λ, de rayon intérieur **a**, de rayon extérieur **b** et de longueur L . Les surfaces cylindriques sont à des températures T1 et T2 uniformes et constantes (surfaces isothermes), (figure 5.). On suppose aussi que le gradient longitudinal de température est négligeable devant le gradient radial.

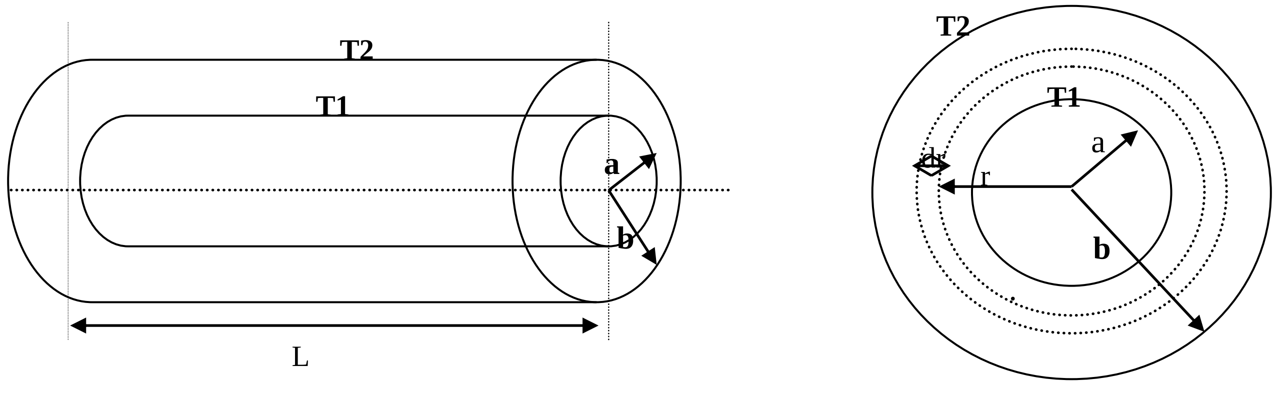


Figure **5**. Cylindre creux traversé par un flux de conduction

Le flux thermique à travers ce cylindre est donné par la loi de Fourier:

$$\Phi = -\lambda.S\frac{dT}{dr}$$

S est surface latérale du cylindre de rayon r : S=2πrL

Donc $\Phi = -\lambda.2\pi rL\frac{dT}{dr}$ ou encore $dT = -\frac{\phi}{\lambda.2\pi L}\frac{dr}{r}$ (II.11)

Comme Φ est constant à travers tout cylindre coaxial de rayon **r** compris entre **a** et **b** , l'équation précédente peut donc s'intégrer de l'intérieur à l'extérieur du cylindre de la manière suivante :

$$\int_{T1}^{T2} dT = -\frac{\Phi}{\lambda.2\pi L}\int_{a}^{b}\frac{dr}{r}$$

D'où : $T1 - T2 = \frac{\Phi}{\lambda.2\pi L}Ln(b/a)$ (II.12)

Et on déduit l'expression du flux thermique : $\Phi = \frac{\lambda.2\pi L}{Ln(b/a)}(T1 - T2)$ (II.13)

A partir de la relation (II.13) on déduit la résistance thermique d'un tube

$$R = \frac{T1 - T2}{\Phi} = \frac{Ln(b/a)}{2\pi L\lambda} \qquad \text{(II.14)}$$

La densité de flux q est :

$$q(r) = \frac{\Phi}{2\pi rL} = \lambda\frac{(T1 - T2)}{Ln(b/a)}.\frac{1}{r} \qquad \text{(II.15)}$$

II.2.1 Distribution des températures :

La distribution radiale des températures peut être obtenue à partir de la relation (II.11),

$$\int_{T1}^{T(r)} dT = -\frac{\Phi}{\lambda.2\pi L}\int_{a}^{r}\frac{dr}{r}$$

$$T(r) - T1 = -\frac{\Phi}{\lambda.2\pi L}Ln(r/a)$$

$$T(r) = T1 - \frac{\Phi}{\lambda.2\pi L}Ln(r/a) \qquad \text{(II.16)}$$

Remplaçons l'équation (II.13) dans (II.16), on a :

$$T(r) = T1 - \frac{T1 - T2}{Ln(b/a)} Ln(r/a) \qquad (II.17)$$

Application N° 4.

Soit un tube d'acier 8/10 (diamètres en mm) dont la température de la paroi interne est 70 °C et celle de la paroi externe est **68°C**.

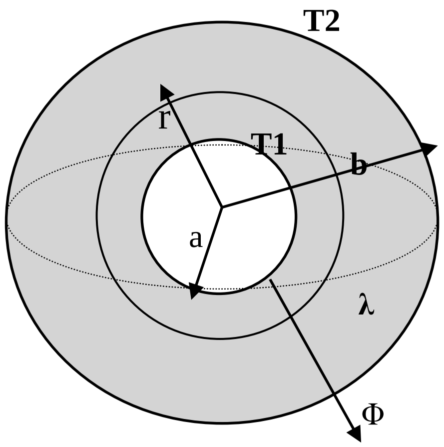
1. Calculer la résistance thermique du tube pour une longueur de 2 m. et le flux correspondant.
2. Déterminer la densité de flux thermique à la paroi extérieure

   On donne: Conductivité thermique de l'acier est 50 $W.m^{-1}.°C^{-1}$

Rép: $\mathbf{R_{th} = 3.55\ .10^{-4}}$ **,** $\mathbf{\Phi = 5631.52}$ **w** 2) $q(b) = 89.62\ .10^{3}$

II.3. Transferts thermiques dans une sphère creuse

On considère une sphère creuse de conductivité thermique λ, de rayon intérieur **a**, de rayon extérieur **b.** Les surfaces sphériques sont à des températures T1 et T2 uniformes et constantes (surfaces isothermes), (figure 6.). On suppose que le champ de température admet une symétrie radiale, si bien que la loi de Fourier se met ici sous la forme :



$$\Phi = -\lambda.S(r)\frac{dT(r)}{dr} \qquad \text{avec:} \quad \mathbf{S(r) = 4\pi r^2}$$

$$\int_{T1}^{T2} dT = -\frac{\Phi}{4\pi\lambda}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{\Phi}{4\pi}\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]$$

$$T1 - T2 = \frac{\Phi}{4\pi\lambda.}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right] \qquad (II.18)$$

Et on déduit l'expression du flux thermique

$$\Phi = \frac{(T1 - T2).4\pi\lambda.\,ab}{b - a} \qquad (II.19)$$

Figure6

et la résistance thermique $R_{Sp} = \dfrac{(b-a)}{4\pi\lambda.a\ .b}$

II.3.1 Distribution des températures :

La distribution radiale des températures peut être obtenue à partir de la relation (II.18), il suffit de remplacer T2 par T(r) et **b** par r , on obtient:

$$T(r) = T1 - \frac{\Phi}{4\pi\lambda.}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right] \qquad \text{(II.20)}$$

Application N° 5.

Soit une sphère creuse d'acier de 5/10 (rayons en cm) dont la température de la paroi interne est 80 °C . Cette sphère est calorifugée à l'extérieure par une couche d'isolant sphérique d'épaisseur de 5 cm. Si la température de la paroi extérieure de l'isolant est 40 C°.

1. Calculer le flux thermique traversant la paroi de cette sphère.
2. calculer la température entre la couche isolante et l'acier
3. Déterminer la densité de flux entre l'isolant et l'acier.

On donne: λacier= 50 $W.m^{-1}.°C^{-1}$ et λisolant= 2 $W.m^{-1}.°C^{-1}$

Rép:

1) R1=0.015, R2=0.13, Φ= 270.95 w

2) T2= T1- Φ.R1 = 75.93 C°

3) q= 2156.15 w/m^2