Université de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de mathematiques

2020/2021
$2^{ème}$ année Master
Semestre 03

Série d'exercices N°1

Exercice 0.1.

Utiliser la la notation indicielle pour écrire les expressions qui suivent, préciser la valeur de n dans chaque cas ainsi que les indices muets et libres.

- $x_{j1}y_1 + x_{j2}y_2 + x_{j3}y_3 = 6$
- $x_{11}y_{11} + x_{12}y_{12} + x_{13}y_{13} + x_{14}y_{14} = C$

Exercice 0.2. Pour $n = 3$, écrire explicitement l'expression $A_{ijk}B^{ij}$.

Exercice 0.3. Démontrer les identités suivantes :

- $a_{ij}x_ix_j = a_{ji}x_ix_j$
- $(a_{ik} + a_{ki})x_ix_k = 0$

Exercice 0.4.

1. Soit $\vec{V}$ et $\vec{U}$ deux vecteurs de E_3. en utilisant la notation indicielle donner les expression de:

$$\bullet \vec{V}, \qquad \bullet \vec{U} \qquad \bullet\ \vec{V}\cdot\vec{U}, \qquad \bullet\ \vec{V}\wedge\vec{U}, \qquad \bullet\ \vec{V}\cdot(\vec{V}\wedge\vec{U})$$

2. Soit A et B deux matruce d'ordre trois, ecrire les expressions suivantes sous forme indicielle:

$$\bullet \vec{V}A = \vec{U}, \qquad \bullet AB \qquad \bullet\ \det A, \qquad \bullet\ A^{-1}.$$

Exercice 0.5. On effectue un changement de base d'un espace vectoriel E_2 , défini par:

$$\vec{e}_1' = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad \vec{e}_2' = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2,$$

1. calculer les nouvelles composantes T'_{ij} en fonction des anciennes.
2. Vérifier les résultats en utilisant la formule générale de changement de base.

Exercice 0.6. On considère un espace vectoriel E_3 à trois dimensions. Partant de la formule $g_{ik} = g_{kj} = \delta_{ij}$: démontrer que pour des vecteurs de base orthogonaux, on a :

$$g^{ik} = 1/g_{ik} \text{ losque } i = k.$$

Exercice 0.7. Soit un espace vectoriel E_2 ayant pour base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère deux vecteurs

$$\vec{X} = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \ \ et \ \ \vec{Y} = -\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2,$$

Déterminer les composantes du produit tensoriel de X par Y . Écrire la matrice de ce tenseur sur la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On effectue un changement de base défini par :

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos 1\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\end{pmatrix}$$

1. Déterminer les nouvelles composantes du produit tensoriel.
2. Écrire la matrice du produit tensoriel pour $\alpha = \pi/2$.