Chapitre III

Régulation par retour d'état linéarisant. Linéarisation entrée/sortie

III.1. NOTION DE DEGRE RELATIF

Soit un système non linéaire analytique (SISO) :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \tag{III.1}$$

Le nombre r est dit degré relatif au point x_0 si :

- $L_g L_f^k h(x) = 0 \quad \forall x \in \text{voisinage de } x_0 \; et \; k < r-1$
- $L_g L_f^{r-1} h(x_0) \neq 0$

III.1.1. Exemple oscillateur de Vonderpol :

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ 2\mu\P(1-\text{«}x_1^2)x_2 - \mu^2 x_1 \end{pmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{g(x)} u \tag{III.2}$$

Calculer le degré relatif dans les deux cas : $y = h(x) = x_1$ et $y = h(x) = \sin x_2$

<u>1er *Cas :*</u> on commence avec $k = 0$

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x^T} g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Pour $k = 1$

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x^T} f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ * \end{bmatrix} = x_2$$

$$L_g L_f h(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$, On arrête et on prend $r-1 = 1 \Rightarrow r = 2 \; \forall x$

<u>2eme *Cas :*</u> on commence avec $k = 0$

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x^T} g = \begin{bmatrix} 0 & \cos x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \cos x_2 \neq 0$$

On arrête et on prend $r-1 = 0 \Rightarrow r = 1$

III.1.2. Illustration simple pour interpréter la notion de degré relatif

Soit $x^0 = x(t^0)$ l'état du système à l'instant t^0, $y(t)$ la sortie du système et supposons qu'on s'intéresse aux dérivées respectives par rapport au temps $y^k(t)$ pour $k = 1,2,\ldots$ à l'instant $t = t^0$ on obtient : $y(t^0) = h(x(t^0)) = h(x^0)$

$$y'(t) = \frac{dh}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dh}{dx}(f(x)+g(x)u) = \underbrace{\frac{dh}{dx}f(x)}_{L_f h(x)} + \underbrace{\frac{dh}{dx}g(x)u}_{L_g h(x)}$$

$$y'(t) = L_f h(x) + L_g h(x)\,u \qquad \text{(III.3)}$$

Hypothèse $r > 1$:

Si le degré relatif r est supérieur à $1\ \forall t$, tel que $x(t)$ voisin de x^0 pour t voisin de t^0 c-à-d on à $L_g h(x) = 0 \Rightarrow y'(t) = L_f h(x)$

$$\begin{aligned} y^{(2)}(t) &= \frac{d(L_f h(x))}{dx^T}\frac{dx}{dt} = \frac{d(L_f h(x))}{dx^T}(f(x)+g(x)u) \\ &= \underbrace{\frac{d(L_f h(x))}{dx^T}f(x)}_{L_f^2 h(x)} + \underbrace{\frac{d(L_f h(x))}{dx^T}g(x)u}_{L_g L_f h(x)} \end{aligned}$$

$$y''(t) = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)\,u \qquad \text{(III.4)}$$

Hypothèse $r > 2 \Rightarrow L_g L_f h(x) = 0$

$\Rightarrow y''(t) = L_f^2 h(x)$

$\vdots$

De la même façon on continue à dérivé successivement, on obtient l'étape k :

$$y^{(k)}(t) = L_f^{(k)} h(x) \qquad \text{(III.5)}$$

Pour tout $k < r$ et voisinage de t^0

$$y^{(r)}(t^0) = L_f^r h(x^0) + L_g L_f^{r-1} h(x^0)\,u(t^0) \qquad \text{(III.6)}$$

La commande figure explicitement avec $L_g L_f^{r-1} h(x^0) \neq 0$.

Le degré relatif est exactement égale au nombre de fois qu'on dérive la sortie $y(t)$ par rapport au temps à l'instant t^0, jusqu'au l'apparition de la commande.

III.1.3. Exemple

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\,u = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2µ¶(1-«x_1^2)x_2 - µ^2 x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

1) $y = h(x) = x_1$ on dérive la sortie :
   $\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$
   $\ddot{y} = \ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = 2µ¶(1-«x_1^2)x_2 - µ^2 x_1 + u$

La commande apparait explicitement $\Rightarrow$ le degré relatif $r = 2$

2) $y = h(x) = \sin x_2$ on dérive la sortie :

$$\dot{y} = \dot{x}_2 \cos x_2 = \cos x_2 (2\mu¶(1 - «x_1^2)x_2 - \mu^2 x_1 + u)$$

La commande apparait $\Rightarrow$ le degré relatif $r = 1$

Lemme :

Les vecteurs $dh(x^0), dL_f h(x^0), \ldots, dL_f^{r-1} h(x^0)$ sont linéairement indépendant (démonstration voir ISIDORI [2], [6]).

III.1.4. Proposition

Si un système possède un degré relatif r au point x^0 donc $r \le n$ et soit :

$$\begin{aligned} &\Phi_1(x) = h(x) \\ &\Phi_2(x) = L_f h(x) \\ &\quad\vdots \\ &\Phi_r(x) = L_f^{r-1} h(x) \end{aligned} \tag{III.7}$$

Si $r < n$, il est toujours possible de trouver $(n-r)$ fonctions :

$$\begin{matrix} \Phi_{r+1}(x) \\ \vdots \\ \Phi_n(x) \end{matrix} \quad / \, \Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \\ \vdots \\ \Phi_n(x) \end{pmatrix} \tag{III.8}$$

Présente une *matrice Jacobiene* non singulière au point x^0 avec $\det J \ne 0$. Il est aussi possible de choisir $\Phi_{r+1}(x)$ jusqu'à $\Phi_n(x)$ de manière à avoir $L_g \Phi_i(x) = 0$ $\forall r+1 \le i < n$ et x voisin de x^0 [8].

a) Exemple:

Soit le système non linéaire:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{f_0} + \underbrace{\begin{pmatrix} e^{x_2} \\ \sim \\ 0 \end{pmatrix}}_{f_1} u \tag{III.9}$$

1er cas : $\sim\, = 1$, 2ème cas $\sim\, = 0$ et $y = h(x) = x_3$

- Ecrire les champs de vecteurs correspondant.
- Calculer le champ de vecteur $[f_0 \quad f_1]$ crochet de Lie.
- Calculer le degré relatif
- Déterminer le difféomorphisme
- Déterminer le système en Z (forme canonique)

b) Solution:

- Les champs de vecteurs :

$$F_1 = -x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$F_2 = e^{x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \sim \frac{\partial}{\partial x_2}$$

- Le crochet de Lie $[f_0 \quad f_1]$

$$[f_0 \quad f_1] = \frac{\partial f_1}{\partial x^T} f_0(x) - \frac{\partial f_0}{\partial x^T} f_1(x)$$

$$[f_0 \quad f_1] = \begin{pmatrix} 0 & e^{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{x_2} \\ \sim \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 e^{x_2} + e^{x_2} \\ -x_2 e^{x_2} - \sim x_1 \\ -\sim \end{pmatrix}$$

- Le degré relatif

Pour $\sim = 1$: $y = x_3 \Rightarrow \dot{y} = \dot{x}_3 = x_2 \Rightarrow \ddot{y} = \dot{x}_2 = x_1 x_2 + u$ dans ce cas $r = 2$

Pour $\sim = 0$: $\dddot{y} = \dot{x}_1 x_2 + x_1 \dot{x}_2 = (-x_1 + e^{x_2} u) x_2 + x_1 x_2^2 \quad \Rightarrow r = 3$

- le difféomorphisme

Pour $\sim = 1$ $(r = 2)$

$$z_1 = \Phi_1(x) = h(x) = x_3$$

$$z_2 = \Phi_2(x) = L_f h(x) = x_2$$

On a $r < n \Rightarrow L_g \Phi_3(x) = 0$

$$L_g \Phi_3(x) = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x^T} g = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

On choisit $z_3 = \Phi_3(x) = -e^{x_2} + x_1 + 1$ avec $\Phi(0) = 0$

$$\Phi(x) = \begin{cases} z_1 = x_3 \\ z_2 = x_2 \\ z_3 = -e^{x_2} + x_1 + 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Phi^{-1}(x) = \begin{cases} x_1 = e^{z_2} + z_3 - 1 \\ x_2 = z_2 \\ x_3 = z_1 \end{cases}$$

Pour $\sim = 0$ $(r = 3)$

$$z_1 = \Phi_1(x) = h(x) = x_3$$

$$z_2 = \Phi_2(x) = L_f h(x) = x_2$$

$$z_3 = \Phi_3(x) = L_f^2 h(x) = x_1 x_2$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} z_1 = x_3 \\ z_2 = x_2 \\ z_3 = x_1 x_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \Phi^{-1}(x) = \begin{cases} x_1 = z_3 / z_2 \\ x_2 = z_2 \\ x_3 = z_1 \end{cases}$$

- Le système en Z :

Pour $\sim = 1$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \dot{x}_3 = z_2 \\ \dot{z}_2 = (e^{z_2} + z_3 - 1) z_2 + u \\ \dot{z}_3 = -(1 + z_2 e^{z_2})(-1 + z_3 e^{z_2}) \rightarrow \textit{dynamique des zéros} \end{cases}$$

Pour $\sim = 0$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = -z_3 + z_3^2 / z_2 + z_2 e^{z_2} u \end{cases}$$

c) *Forme canonique*

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_r = b(z) + a(z) u \\ \dot{z}_{r+1} = q_{r+1}(z) \\ \vdots \qquad\qquad \rightarrow \textit{dynamique des zéros} \\ \dot{z}_n = q_n(z) \end{cases} \qquad \text{(III.10)}$$

d) *Exemple:*

Soit le système non linéaire:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - x_1^3 \\ x_1 \\ -x_3 \\ x_1^2 + x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2(1 + x_3) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \qquad y = h(x) = x_4 \qquad \text{(III.11)}$$

- Le degré relatif

$y = h(x) = x_4 \ldots \ddot{y} = 2 x_1 \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \Rightarrow r = 2 \quad \forall x_3 \neq -1$

- le difféomorphisme

$z_1 = \Phi_1(x) = h(x) = x_4$

$z_2 = \Phi_2(x) = L_f h(x) = x_1^2 + x_2$

Il faut trouver $\Phi_3(x)$ et $\Phi_4(x)$ pour compléter le difféomorphisme ($n = 4$)

$$L_g\Phi_3(x)=\frac{\partial\Phi_3}{\partial x^T}g=0 \quad\Rightarrow \frac{\partial\Phi_3}{\partial x_2}(2+2x_3)+\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_3}=0$$

On choisit $z_3=\Phi_3(x)=-2x_3-x_3^2+x_2$ avec $\Phi(0)=0$

$$L_g\Phi_4(x)=\frac{\partial\Phi_4}{\partial x^T}g=0 \Rightarrow \frac{\partial\Phi_4}{\partial x_2}(2+2x_3)+\frac{\partial\Phi_4}{\partial x_3}=0$$

On choisit $z_4=\Phi_4(x)=x_1$

- Le système en Z :

<u>1ere méthode :</u> (après développement de calcule)

$$\begin{cases}\dot z_1=z_2\\ \dot z_2=-4z_4^4+2z_4^2z_2+z_4+2\sqrt{1-z_3+z_2-z_4^2}-u\\ \dot z_3=z_4+2\left(-1+\sqrt{1+z_2-z_4-z_3}\right)+2\left(-1+\sqrt{1+z_2-z_4-z_3}\right)^2\\ \dot z_4=z_4z_2-2z_4^3\end{cases} \tag{III.12}$$

<u>2eme méthode :</u> (la méthode de Jacobienne)

On a $z_1=x_4$ et $z_2=x_1^2+x_2$

Dans ce cas on propose $z_3=x_3$ et $z_4=x_1$

$$J=\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_4}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial\Phi_4}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\Phi_4}{\partial x_4}\end{pmatrix} \tag{III.13}$$

$$\Rightarrow J=\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\ 2x_2&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\det(J)=-1\neq 0$ donc la proposition de z_3 et z_4 est correcte.

$$\Phi(x)=\begin{cases}z_1=x_4\\ z_2=x_1^2+x_2\\ z_3=x_3\\ z_4=x_1\end{cases} \Rightarrow \quad \Phi^{-1}(x)=\begin{cases}x_1=z_4\\ x_2=z_2-z_4^2\\ x_3=z_3\\ x_4=z_1\end{cases}$$

Donc le système en Z est :

$$\begin{cases}\dot z_1=z_2\\ \dot z_2=2z_4(z_4(z_2-z_4^2)-z_4^3)+z_4+2(1+z_3)u\\ \dot z_3=-z_3+u\\ \dot z_4=z_4z_2-2z_4^3\end{cases} \tag{III.14}$$

III.2. LINEARISATION EXACTE PAR BOUCLAGE (SYSTEME SISO)

Soit le système SISO la structure du régulateur qui convient $u = \sim(x) + \quad (x)v$ avec v références externes :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\sim(x) + g(x) \quad (x)v \\ y = h(x) \end{cases} \tag{III.15}$$

$\sim(x)$ et $\quad (x)$ caractérisent la commande, sont définies dans $\Re^n$ avec $\quad (x) \neq 0$

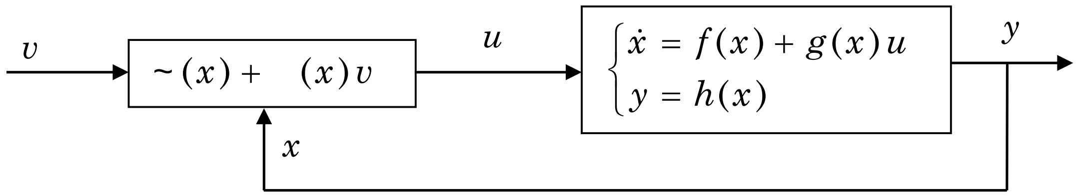


Figure III.1. Boucle de linéarisation d'un système

Pour trouver la commande il faut trouver d'abord la forme normale. Soit un système non linéaire de degré relatif $r = n$ en un point $x = x_0$ le changement de base est donné par la construction de vecteur :

$$z = \Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \\ \vdots \\ \Phi_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{pmatrix} \tag{III.16}$$

D'après (III.10) nous avons $\dot{z}_n = b(z) + a(z)u = v$ puisque $\dot{z}_r = \dot{z}_n$, dans ce cas :

$$u = \frac{v - b(z)}{a(z)} = \frac{v - b(\Phi(x))}{a(\Phi(x))} \tag{III.17}$$

Le système en BF (la linéarisation exacte $r = n$)

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n \\ \dot{z}_n = v \end{cases} \Rightarrow \dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v \tag{III.18}$$

C'est une forme linéaire et commandable, nous avons $b(z) = L_f^n h(x)$ et $a(z) = L_g L_f^{n-1} h(x)$ donc :

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} (-L_f^n h(x) + v) \tag{III.19}$$

$v = Kz = k_0 z_1 + k_1 z_2 + \cdots + k_{n-1} z_n$

Le gain K peut trouver grâce au placement de pôle ou par optimisation (Riccati)

A partir de (III.16) v prend la forme :

$$v = k_0 h(x) + k_1 L_f h(x) + \cdots + k_{n-1} L_f^{n-1} h(x) \quad \Rightarrow v = \sum_{i=0}^{n-1} k_i L_f^i h(x) \qquad \text{(III.20)}$$

Donc la commande (III.19) devienne :

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} (-L_f^n h(x) + \sum_{i=0}^{n-1} k_i L_f^i h(x)) \qquad \text{(III.21)}$$

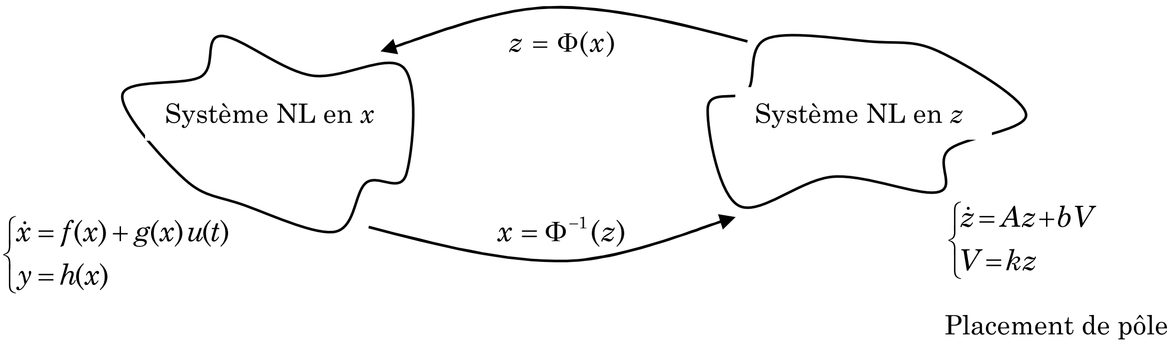


Figure III.2. Résumé de la commande avec linéarisation exacte

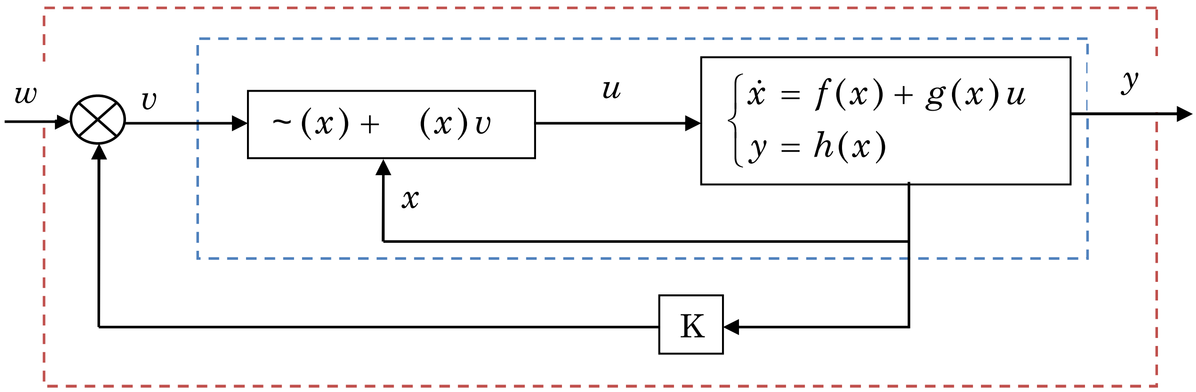


Figure III.3. Boucle de commande d'un système avec retour d'état

III.2.1. Exemple

Soit le système non linéaire:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{pmatrix} u \quad ; \; y = h(x) = x_3 \qquad \text{(III.22)}$$

1- Le degré relatif :

$\dot{y} = \dot{x}_3 = x_1 - x_2$

$\ddot{y} = -x_1 - x_2^2$

$\dddot{y} = -2x_2(x_1 + x_2^2) - 2e^{x_2} u \quad \Rightarrow r = 3$

2- le difféomorphisme

$z_1 = \Phi_1(x) = h(x) = x_3$

$z_2 = \Phi_2(x) = L_f h(x) = x_1 - x_2$

$z_3 = \Phi_3(x) = L_f^2 h(x) = -x_1 - x_2^2$

3- le système en z :

$\dot{z}_1 = \dot{x}_3 = x_1 - x_2 = z_2$

$\dot{z}_2 = -x_1 - x_2^2 = z_3$

$\dot{z}_3 = -2x_2(x_1 + x_2^2) - (1 + 2x_2)e^{x_2}u = v$

4- La commande :

$$u = \frac{-2x_2(x_1 + x_2^2) - v}{(1 + 2x_2)e^{x_2}}$$

Avec : $v = k_0 h(x) + k_1 L_f h(x) + \cdots + k_{n-1} L_f^{n-1} h(x)$

III.2.2. Lemme

Le problème de linéarisation exact dans l'espace d'état est solvable si-s-si existe un voisinage u de $\dot{x}$ et une fonction réelle $\text{ª}(x)$ définie dans u

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = \text{ª}(x) \end{cases} \qquad \text{(III.23)}$$

a un degré relatif $r = n$ au point $\dot{x}$ (voir [6]).

III.2.3. Théorème

Soit le système $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ la solution au problème de linéarisation exact dans l'espace d'état au voisinage d'un point $\dot{x}$ existe si-s-si :

- $rang\left[g(\dot{x}) \quad ad_{fg}(\dot{x}) \quad \cdots \quad ad_{fg}^{n-1}(\dot{x})\right] = n$ avec $ad_{fg}(x) = [f \quad g]$
- La distribution $\Delta(x) = span\{g(x), ad_{fg}(x), \ldots, ad_{fg}^{n-2}(x)\}$ est involutive au voisinage de $\dot{x}$

III.2.4. Résumé

La condition nécessaire et suffisante pour que le système soit localement linéarisable par retour d'état :

- On calcule le rang de la matrice $\left[g \quad ad_{fg} \quad \cdots \quad ad_{fg}^{n-1}\right]$, si le *rang*=*n* alors le vecteur est involutif.
- $f(0) = 0$
- Le changement de variable non linéaire est obtenu en résolvant le système au dérivé partiel dont la solution n'est pas unique :

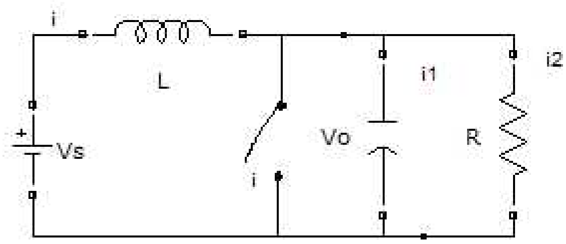
$$\begin{aligned} &L_g T_1 = 0 \\ &Lad_{fg} T_1 = 0 \\ &\vdots \\ &Lad_{ad}^{n-2} T_1 = 0 \end{aligned} \qquad \text{(III.24)}$$

Une fois T_1 obtenu les autres $T_2, \cdots, T_n$ sont obtenus a partir de :

$$T_{i+1}(x) = L_f T_i(x) \qquad \text{(III.25)}$$

III.2.5. Exemple

Synthèse de la commande linéarisante pour un convertisseur élévateur (Continue- Contenue). On choisit $x^T = [i \quad V_0] = [x_1 \quad x_2]$; $u = \{0, 1\}$



$$Vs = L\frac{di(t)}{dt} + V_0 - V_0\, u \Rightarrow \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L}(Vs - V_0) + \frac{V_0}{L}u \qquad \text{(III.26)}$$

$$i = i_1 + i_2 + i.u \;;\; i_2 = \frac{V_0}{R};\, V_0 = \frac{1}{C}\int i_1(t)dt \Rightarrow \frac{dV_0}{dt} = \frac{1}{C}(i - \frac{V_0}{R} - i.u) \qquad \text{(III.27)}$$

A partir de (III.26) et (III.27) on trouve :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{L}(Vs - x_2) \\ \dfrac{1}{C}(x_1 - \dfrac{x_2}{R}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{x_2}{L} \\ \dfrac{-x_1}{C} \end{pmatrix} u \qquad \text{(III.28)}$$

A l'équilibre (régime statique) nous avons $\frac{dx}{dt} = 0$; $u = D(x) = $ Constant :

$$\frac{1}{L}(Vs - x_2) = -\frac{x_2}{L}u \Rightarrow x_2^* = \frac{Vs}{1 - D(x)}$$

$$\frac{1}{C}(x_1 - \frac{x_2}{R}) = \frac{x_1}{C}u \Rightarrow x_1^* = \frac{Vs}{R(1 - D(x))^2}$$

Elimination de $D(x)$ on a la caractéristique $x_1^* = f(x_2^*)$ c.-à-d. : $x_1^* = \dfrac{(x_2^*)^2}{RVs}$

Dans ce cas $f(0) \neq 0$, il faut appliquer un changement de variable non linéaire pour avoir $(f(0) = 0)$

$$\begin{cases} z_2 = x_2 - Vs \Rightarrow x_2 = z_2 + Vs \\ z_1 = x_1 - \dfrac{Vs}{R} \Rightarrow x_1 = z_1 + \dfrac{Vs}{R} \end{cases} \tag{III.29}$$

Si on remplace (III.29) dans (III.28) on trouve :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dz_1}{dt} \\ \dfrac{dz_2}{dt} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{z_2}{L} \\ \dfrac{z_1}{C} - \dfrac{z_2}{RC} \end{pmatrix}}_{f} + \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{z_2}{L} + \dfrac{Vs}{L} \\ -\dfrac{z_2}{C} - \dfrac{Vs}{RC} \end{pmatrix}}_{g} u \quad \Rightarrow f(0) = 0 \tag{III.30}$$

Vérification des conditions du théorème de linéarisation exact

$$\begin{bmatrix} g & ad_{fg} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{L}(z_2 + Vs) & \dfrac{-1}{LRC}(z_2 + Vs) \\ \dfrac{-1}{C}(z_1 + \dfrac{Vs}{R}) & \dfrac{-1}{C}(\dfrac{Vs}{R^2C} + \dfrac{Vs}{L} + \dfrac{z_1}{RC}) \end{pmatrix} \tag{III.31}$$

Le rang de la matrice $\begin{bmatrix} g & ad_{fg} \end{bmatrix} = 2$, si $z_2 \neq -Vs$ alors le vecteur $g(z)$ est involutif. $\Rightarrow$ Le système est localement linéarisable (sauf la droite $z_2 = -Vs$) par une transformation difféomorphique.

- Résolution des équations aux dérivés partielles :

$$L_g T_1 = \frac{\partial T_1}{\partial z_1} g_1(z) + \frac{\partial T_1}{\partial z_2} g_2(z) = 0 \text{ avec } T_1(0) = 0$$

$$T_1(z) = (z_1 + \frac{Vs}{R})^2 + \frac{C}{L}(z_1 + Vs)^2 - \frac{Vs^2}{R^2} - \frac{CVs^2}{L} \tag{III.32}$$

$$T_2 = L_f T_1(z) = \frac{\partial T_1}{\partial z_1} f_1(z) + \frac{\partial T_1}{\partial z_2} f_2(z)$$

$$T_2(z) = \frac{2Vs}{L}(z_1 + \frac{Vs}{R}) - \frac{2}{RL}(z_2 + Vs)^2 \tag{III.33}$$

La forme canonique :

$$\frac{dT_1(z)}{dt} = T_2(z)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_2(z)}{dt} &= \left(\frac{-2Vsz_2}{L^2} - \frac{4}{RLC}(z_2 + Vs)(z_1 - \frac{z_2}{R}) \right) + \\ &\left(\frac{2Vs}{L^2}(z_2 + Vs) + \frac{4}{RLC}(z_2 + Vs)(z_1 + \frac{Vs}{R}) \right) u = V \end{aligned} \tag{III.34}$$

$$u(z) = (V + \frac{2Vs}{L^2}(z_2 + Vs) + \frac{4}{RLC}(z_2 + Vs)(z_1 + \frac{Vs}{R})) / (\frac{2Vsz_2}{L^2} + \frac{4}{RLC}(z_2 + Vs)(z_1 - \frac{z_2}{R}))$$

V est calculé par un placement de pôles : $V = k_0 z_1 + k_1 z_2$

III.3. COMMANDE PAR BOUCLAGE NON LINEAIRE (SYSTEME MIMO)

Soit le système MIMO suivant :

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)\, u_i \quad \text{avec} \quad \begin{cases} y_1 = h_1(x) \\ \vdots \\ y_m = h_m(x) \end{cases} \tag{III.35}$$

Ou $f(x), g(x), \ldots, g_m(x)$ sont des champs de vecteurs et $h_1(x), \ldots, h_m(x)$ sont analytiques définie au voisinage de x_0

III.3.1 Notion de degré relatif vectoriel

Le système est dit de degré relatif vectoriel $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ au point x_0 si :

- $L_{gj} L_f^k h_i(x) = 0 \quad 1 \le i, j \le m \ et\ \forall k \le r_i$ pour tout x au voisinage de x_0
- La matrice carrée définie par (III.36) est non singulière au voisinage de x_0, le degré relatif r_i de la $i^{éme}$ sortie h_i est le nombre de fois qu'il faut dériver la sortie y_i pour faire apparaitre au moins une entré.

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g1} L_f^{r_1 - 1} h_1(x) & \ldots & L_{gm} L_f^{r_1 - 1} h_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g1} L_f^{r_m - 1} h_m(x) & \ldots & L_{gm} L_f^{r_m - 1} h_m(x) \end{bmatrix} \tag{III.36}$$

III.3.2 La forme normale

Difféomorphisme $\Phi^1(x), \Phi^2(x), \ldots, \Phi^m(x)$ tel que $\Phi^i(x) = \left[\Phi_1^i(x) \ldots \Phi_{r_i}^i(x)\right]$

Si $r < n$ les nouvelles coordonnées : $\begin{cases} z_1^i = \Phi_1^i = h_i(x) \\ z_2^i = \Phi_2^i = L_f h_i(x) \\ \vdots \\ z_{r_i}^i = \Phi_{r_i}^i = L_f^{r_i - 1} h_i(x) \end{cases}$

Les $(n-r)$ fonctions manquantes $\Phi_{r+1}(x), \ldots, \Phi_n(x)$ sont choisit de manière à avoir $L_{gj} \Phi_i(x) = 0$ pour $r+1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$

$$\begin{cases} \dot{z}_1^i = z_2^i \\ \vdots \\ \dot{z}_{r_i - 1}^i = z_{r_i}^i \\ \dot{z}_{r_i}^i = \left[L_f^{r_i} h_i(x) + \sum_{j=1}^{m} L_{gj} L_f^{r_i - 1} h_i(x)\, u_j \right] = \Phi^{-1}(x) \end{cases} \tag{III.37}$$

$$\P^i(x) = \left[\P_1^i, \P_2^i \ldots \P_{r_i}^i(x)\right]^T = \left[\Phi_1^i \ldots \Phi_{r_i}^i\right]^T \ ; \ \text{¦} = \left[\text{¦}_1, \ldots \text{¦}_r\right]^T = \left[\Phi_{r+1}(x) \ldots \Phi_n^n(x)\right]^T$$

Dans ce cas le système devient :

$$\begin{cases} \dot{\P}_1^i = \P_2^i \\ \vdots \\ \dot{\P}_{r_i-1}^i = \P_{r_i}^i \\ \dot{\P}_{r_i}^i = b_i(\P,\text{¦}) + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(\P,\text{¦})\, u_j \end{cases} \qquad \text{(III.38)}$$

$$\dot{\text{¦}} = q(\P,\text{¦}) + \sum_{i=1}^{m} p_i(\P,\text{¦})\, u_i = q(\P,\text{¦}) + P(\P,\text{¦})U$$

$$\begin{cases} q_1(\P,\text{¦}) = L_f \Phi_{r+1} \\ \vdots \\ q_{n-r}(\P,\text{¦}) = L_f \Phi_n \end{cases} \qquad \text{(III.39)}$$

Linéarisation exact par retour d'état statique :

$$\begin{cases} \dot{z}_1^i = z_2^i \\ \dot{z}_2^i = z_3^i \\ \vdots \\ \dot{z}_{r_i-1}^i = \dot{z}_{r_i} \end{cases} \qquad \text{(III.40)}$$

Avec : $\dot{z}_{r_i} = b_i(z) + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(z)\, u_j = V \quad i = 1,\ldots,m$

$$V = b + A.U \Rightarrow U = A^{-1}(V - b) \qquad \text{(III.41)}$$

Avec : $b = \left[L_f^{r_1} h_1(x) \cdots L_f^{r_m} h_m(x)\right]^T$

Dans ce cas en aura le système :

$$\begin{cases} \dot{Z} = A.Z + B.V \\ Y = C.Z \end{cases} \qquad \text{(III.42)}$$

Avec : $A = diag(a_i), B = diag(b_i), C = diag(c_i)$

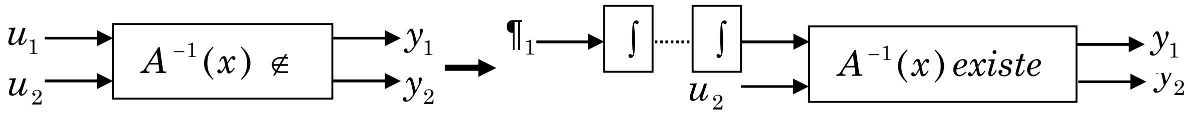
$$a_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; c_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1*r_i}$$

C'est la forme canonique de *Brunowsky*

Remarques

- Dans le cas ou la matrice A n'est pas inversible il faut faire un retour d'état dynamique c-à-d:

Retour d'état statique Retour d'état dynamique



A n'est pas inversible On augmente le degré du système

- Le degré relatif d'un système MIMO est $r = \sum r_i$ avec r_i le degré relatif de la sortie (on dérive jusqu'au l'obtention d'au moins une commande).
- Si $\sum r_i = n$ le système peut être exacte linéarisable.

III.3.3 Exemple d'un retour d'état statique

Soit le système MIMO (Figure III.4). On choisit : $x^T = \left[\ _1 \quad _1 \quad _2 \quad _2\right]$; ; $g = 9{,}81\ m/s^2$

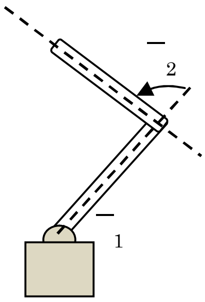


Figure III.4. Bras manipulateur à deux degré de libertés

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{1+\sin^2 x_3}\left(x_4^2 \sin x_3 + 2x_2x_4 \sin x_3 - g(x_1+x_3) - 2g\cos x_1\right) + \frac{1+\cos x_3}{1+\sin^2 x_3} \times$$
$$\left(x_2^2 \sin x_3 + g\cos(x_1+x_3)\right) + \frac{1}{1+\sin^2 x_3}u_1 - \frac{1+\cos x_3}{1+\sin^2 x_3}u_2 = f_2(x) + (*)u_1 + (**)u_2$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1+\cos x_3}{1+\sin^2 x_3}\left(x_4^2 \sin x_3 + 2x_2x_4 \sin x_3 - g\cos(x_1+x_3) - 2g\cos x_1\right) + \frac{3+2\cos x_3}{1+\sin^2 x_3} \times$$
$$\left(-x_2^2 \sin x_3 + g\cos(x_1+x_3)\right) - \frac{1+\cos x_3}{1+\sin^2 x_3}u_1 + \frac{3+2\cos x_3}{1+\sin^2 x_3}u_2 = f_4(x) + ('')u_1 + (''')u_2$$

Calculer la commande U :

1ère cas $y = h(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$; **2ème cas** $y = h(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Solution (1ère cas)

$y_1 = h_1(x) = x_1 = \bar{}_1 \Rightarrow r_1 = 2$

$y_2 = h_2(x) = x_3 = \bar{}_2 \Rightarrow r_2 = 2$

$r = r_1 + r_2 = 4 = n \rightarrow$ Le système est exactement linéarisable.

Le difféomorphisme

$$\begin{cases} z_1^1 = \Phi_1^1(x) = h_1(x) = x_1 = Z_1 \\ z_2^1 = \Phi_2^1(x) = L_f h_1(x) = x_2 = Z_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1^2 = \Phi_1^2(x) = h_2(x) = x_3 = Z_3 \\ z_2^2 = \Phi_2^2(x) = L_f h_2(x) = x_4 = Z_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = Z_2 \\ \dot{Z}_2 = f_2(x) + (*)u_1 + (**)u_2 = g_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{Z}_3 = Z_4 \\ \dot{Z}_4 = f_4(x) + ('')u_1 + (''')u_2 = g_2 \end{cases}$$

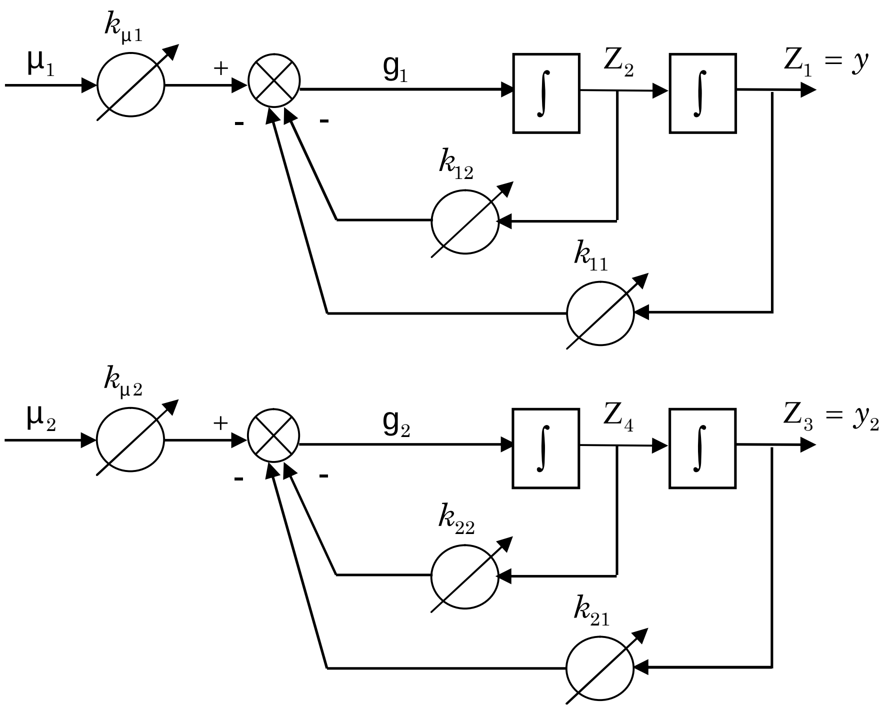


Figure III.5. Systèmes en Z

La forme canonique de *Brunowsky*

$$b(x) = \begin{bmatrix} L_f^2 h_1(x) \\ L_f^2 h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2(x) \\ f_4(x) \end{bmatrix}$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g1}L_f h_1(x) & L_{g2}L_f h_1(x) \\ L_{g1}L_f h_2(x) & L_{g2}L_f h_2(x) \end{bmatrix} \quad g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{1+\sin^2 x_3} \\ 0 \\ -\dfrac{1+\cos x_3}{1+\sin^2 x_3} \end{bmatrix} \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1+\cos x_3}{1+\sin^2 x_3} \\ 0 \\ \dfrac{3+2\cos x_3}{1+\sin^2 x_3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{1+\sin^2 x_3} \begin{bmatrix} 1 & -(1+\cos x_3) \\ -(1+\cos x_3) & 3+2\cos x_3 \end{bmatrix}$$

D'après (III.41) la loi de commande est donné par : $U = A^{-1}(V-b)$

$$u_1 = -\left(x_4^2 \sin x_3 + 2x_2x_4 \sin x_3 - g\cos(x_1+x_3) - 2g\cos x_3\right)$$
$$+ (1+\cos x_3)\mathrm{g}_2 + (3+2\cos x_3)\mathrm{g}_1$$

$$u_2 = \left(x_2^2 \sin x_3 + g\cos(x_1+x_3)\right) + (1+\cos x_3)\mathrm{g}_1 + \mathrm{g}_2$$

Placement de pôles (voir figure III.5)

$$\begin{cases} \mathrm{g}_1 = -k_{11}\mathrm{Z}_1 - k_{12}\mathrm{Z}_2 + k_{\mu 1}\mu_1 \\ \mathrm{g}_2 = -k_{21}\mathrm{Z}_3 - k_{22}\mathrm{Z}_4 + k_{\mu 2}\mu_2 \end{cases}$$

1er sous système

$$\dot{\mathrm{Z}}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_{11} & -k_{12} \end{bmatrix} \mathrm{Z}^1 + \begin{bmatrix} 0 \\ k_{\mu 1} \end{bmatrix} \mu_1 \Rightarrow \frac{y_1(s)}{\mu_1(s)} = \frac{k_{\mu 1}}{s^2 + sk_{12} + k_{11}}$$

$$\Rightarrow \quad y_1(\infty) = \lim_{s\to\infty} s y_1(s) = \frac{k_{\mu 1}}{k_{11}}\mu_1$$

$y_1(\infty) = \mu_1 \rightarrow$ l'erreur nulle en régime permanant $\Rightarrow k_{\mu 1} = k_{11}$

2ème sous système

$$\dot{\mathrm{Z}}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_{21} & -k_{22} \end{bmatrix} \mathrm{Z}^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ k_{\mu 2} \end{bmatrix} \mu_2$$

La même résonnement nous donnes : $k_{\mu 2} = k_{21}$

Placement de pôles

$(s+p_1)(s+p_2) = s^2 + (p_1+p_2)s + p_1p_2$

- 1er sous système $p_1 = p_2 \Rightarrow k_{11} = p_1^2;\ k_{12} = 2p_1$
- 2ème sous système $p_1 = p_2 \Rightarrow k_{21} = p_1^2;\ k_{22} = 2p_1$

2ème cas :

$y_1 = h_1(x) = x_2 \Rightarrow r_1 = 1$ puisque $\dot{y}_1 = \dot{x}_2 = f_2(x) + (*)u_1 + (**)u_2$

$y_2 = h_2(x) = x_3 = {}^{-}{}_2 \Rightarrow r_2 = 2$

$r = r_1 + r_2 = 3 < n \rightarrow$ Le système est partiellement linéarisable.

Le difféomorphisme

$$\{ z_1^1 = h_1(x) = x_2 = Z_1$$

$$\begin{cases} z_1^2 = h_2(x) = x_3 = Z_2 \\ z_2^2 = L_f h_2(x) = x_4 = Z_3 \end{cases}$$

Compléter le difféomorphisme

$$L_g \Phi_4(x) = L_g z_4 = 0 \text{ on choisit } Z_4 = \sin x_1 \ \det\left[\frac{\Phi(x)}{dx}\right] \neq 0$$

Donc la forme canonique de *Brunowsky* est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = \dot{x}_2 = f_2(x) + (*)u_1 + (**)u_2 = \mathrm{g}_1 \\ \dot{Z}_2 = \dot{x}_3 = x_4 = Z_3 \\ \dot{Z}_3 = \dot{x}_4 = f_4(x) + ('')u_1 + (''')u_2 = \mathrm{g}_2 \\ \dot{Z}_4 = \dot{x}_1 \cos x_1 = Z_1 \cos\{arc\sin(Z_4)\} \quad \text{avec } \dot{x}_1 = x_2 = Z_1 \end{cases}$$

La loi de commande est donné par :

$$u_1 = -\left(x_4^2 \sin x_3 + 2x_2 x_4 \sin x_3 - g\cos(x_1 + x_3) - 2g\cos x_3\right) + (1 + \cos x_3)\mathrm{g}_2 + (3 + 2\cos x_3)\mathrm{g}_1$$

$$u_2 = \left(x_2^2 \sin x_3 + g\cos(x_1 + x_3)\right) + (1 + \cos x_3)\mathrm{g}_1 + \mathrm{g}_2$$

III.4. CONCLUSION

Ce chapitre permet de résoudre le problème de régulation par retour d'état linéarisant. Ainsi la linéarisation (entrée/sortie) exacte dans l'espace d'état au voisinage d'un point de fonctionnement des systèmes non linéaires de type SISO et MIMO. Il est question de rappelé les déférentes notions de base afin de faire face à ce problème.

Dans le but de synthétise une commande non linéaire il faut passer par l'étape d'étude de stabilité ou le chapitre suivant introduit des notions de base de stabilité selon la théorie de Lyapunov.