Chapitre 3 :

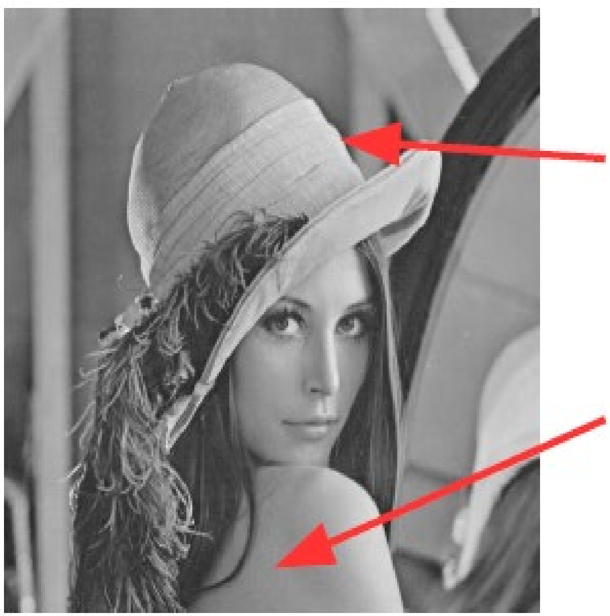
Convolution et Filtrage

2. Filtrage fréquentiel

Les fréquences dans l'image

Qu'est-ce qu'une fréquence dans une image ?

- Basses fréquences : régions homogènes, floues
- Hautes fréquences : contours, changement brusques d'intensité, bruit



Haute fréquence

Basse fréquence

La plus grande partie de l'énergie d'une image se situe dans les basses fréquences.

Les fréquences dans l'image

image originale

basses fréquences

hautes fréquences

Analyse spectrale d'une image

- Une image est avant tout un signal 2D
- A ce titre, on peut en analyser les fréquences et les caractéristiques spectrales
- L'outil de base est **la Transformée de Fourier (TDF)**

Transformée en nombres complexes

- La TDF F(u,v) d'une image fournit une image de type complexe :

  F(u,v) = *partie réelle* + *i . partie imaginaire*

- Module de la transformée :

$$|F(u\,,\,v)| = \sqrt{(Reel^2 + Imaginaire^2)}$$

Transformée de Fourier continue : 1D

fonction initiale

Transformée directe

$$\boxed{F(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi ut}dt = TF\big(f(t)\big)}$$

transformée (spectre)

variable fréquentielle

variable temporelle

Condition suffisante d'existence $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < \infty$ Signal à énergie finie

<u>Notations usuelles</u>
$$\begin{cases} x(t), X(f) \\ f(t), F(u) \end{cases}$$
mieux adaptée à l'extension au cas 2d

Transformée inverse

$$\boxed{f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{j2\pi ut}du = TF^{-1}\big(F(u)\big)}$$

Transformée de Fourier discrète : 1D

$$F_n(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_e) e^{-j2\pi u n T_e}$$

Transformée (continue) de Fourier
d'une séquence discrète (TFCD)

variable continue
$u \in R$

transformée
f_e-périodique

fenêtrage (observation finie)

Transformées
réversibles

$$F_n(u) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_e) e^{-j2\pi u n T_e}$$

échantillonnage des fréquences $u = \frac{k}{N} f_e, k \in [0, N-1]$

Transformée de Fourier discrète
(d'une séquence discrète) (TFD)

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j2\pi k \frac{n}{N}}$$

variable discrète $k \in [0, N-1]$

Échantillonnage régulier 2D

$$f_n(x,y)=\begin{cases} f_a(x,y) & \text{pour } \begin{cases} x=mT_e^x \\ y=nT_e^y \end{cases} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

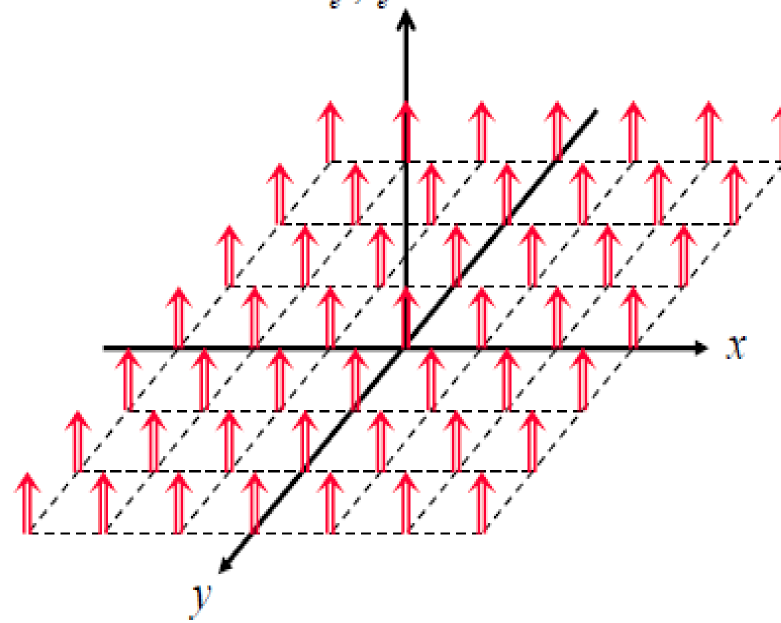
$$\begin{array}{c} \delta_{T_e^x,T_e^y}(x,y) \\ \downarrow \\ f_a(x,y) \longrightarrow \otimes \longrightarrow f_n(x,y) \end{array}$$

$$\boxed{f_n(x,y)=f_a(x,y)\,\delta_{T_e^x,T_e^y}(x,y)}$$

séquence discrète

notée $f(mT_e^x,nT_e^y)$ ou $f(m,n)$

$\delta_{T_e^x,T_e^y}(x,y)$



Peigne de Dirac 2d

$$\delta_{T_e^x,T_e^y}(x,y)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(x-mT_e^x,\,y-nT_e^y)$$

Transformée de Fourier discrète 2D

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy = TF(f(x,y))$$

Transformée (continue) de Fourier (TF)

Transformée de Fourier discrète (d'une séquence discrète) (TFD)

$$F(k,l) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)e^{-j2\pi\left(k\frac{m}{M}+l\frac{n}{N}\right)}$$

variables discrètes $\begin{cases} k \in [0, M-1] \\ l \in [0, N-1] \end{cases}$

Transformée discrète d'une image numérique

- M x N raies distinctes pour une image de MxN pixels.
- TDF d'une image numérique :

$$TDF(g)(k,l)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} g(m,n)\, e^{-2i\pi\left(\frac{mk}{M}+\frac{nl}{N}\right)}$$

Domaine Spatial

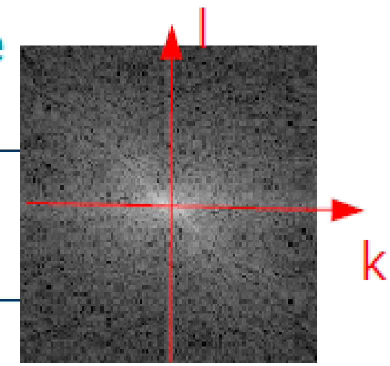
Domaine Fréquentiel

Module du spectre

Image Originale

TDF

Image Spectre



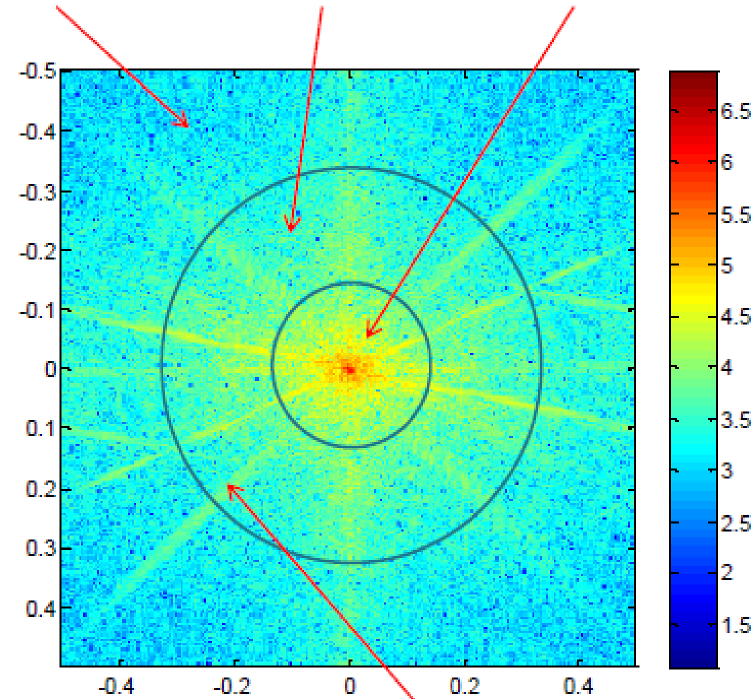
M x N

M x N

Exemple

Image naturelle

$$|TF(.)|$$



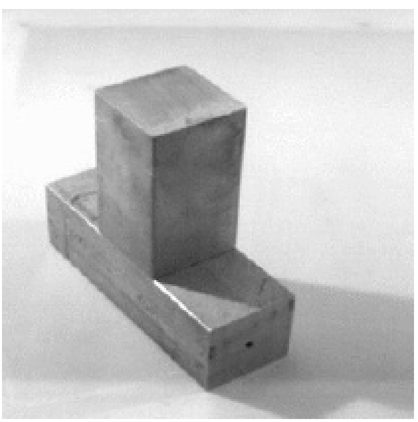
Transformée de Fourier discrète 2D

- En général F(u,v) est une fonction à valeurs complexes :

$$F(u,v) = M(u,v)e^{j\theta(u,v)}$$

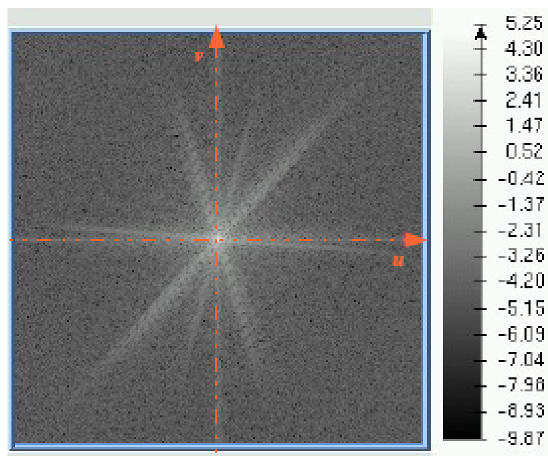
  - M(u,v) = ||F(u,v)|| module ou spectre fréquentiel de l'image
  - Θ(u,v) spectre de phase de F(u,v)

Image



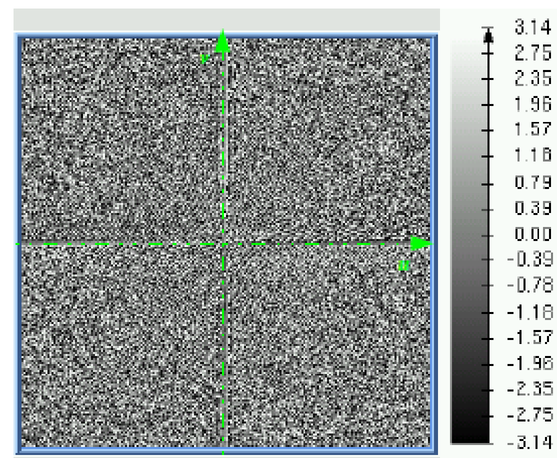
$f[x,y]$

Module



$\ln(\|F[u,v]\|)$

Phase



$\varphi[u,v]$

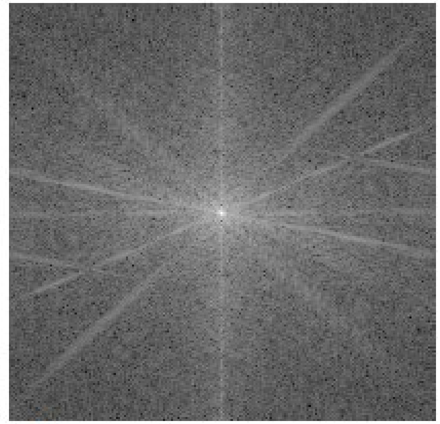
Phase et amplitude de la TFD2D

- Module du spectre :
  - Contributions fréquentielles, orientations des structures
- Phase du spectre
  - Liée à la localisation dans l'espace (translation : variation de la phase)

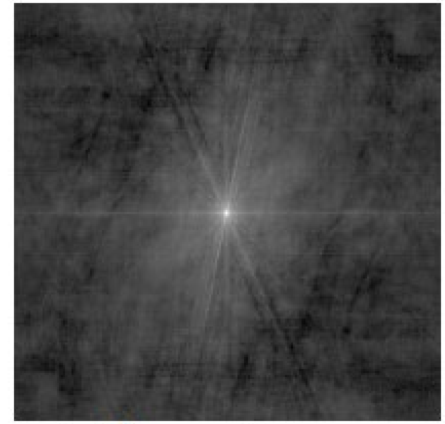
Transformée de Fourier discrète 2D

Exemple:

$f(x,y)$

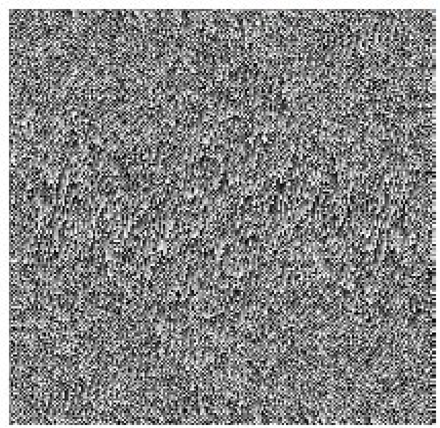


$|\hat{f}(u,v)|$



$U^{-1}\,|\hat{f}(u,v)|$

$\varphi[\hat{f}(u,v)]$



$U^{-1}\,\varphi[\hat{f}(u,v)]$

Signification de la phase

Image naturelle A

Image naturelle B

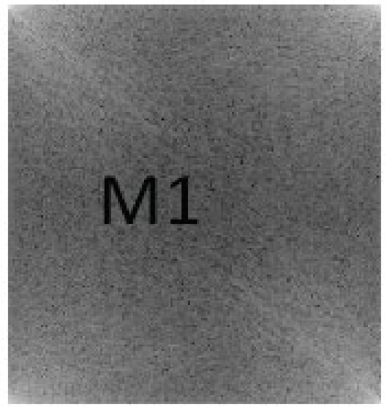
$TF^{-1}\left(\|TF(B)\| e^{\varphi(TF(A))}\right)$

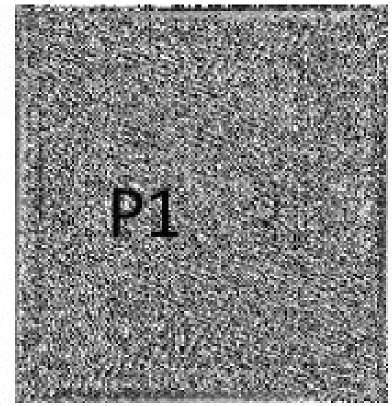
la phase représente la position des structures (localisation des contours, régions, ...)

$TF^{-1}\left(\|TF(A)\| e^{\varphi(TF(B))}\right)$

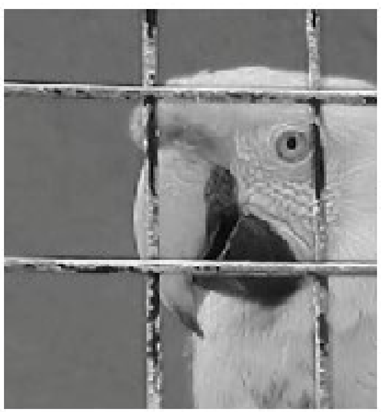
Quelques propriétés

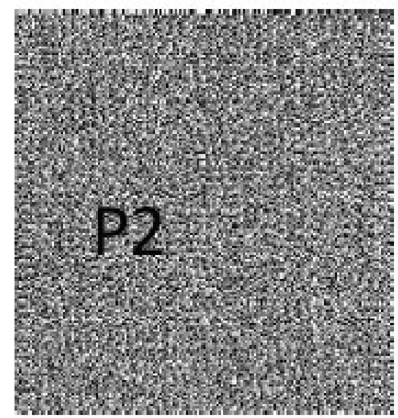
- Mélange de la phase et du module

TF  = 

x exp(i 

)

TF  = 

x exp(i 

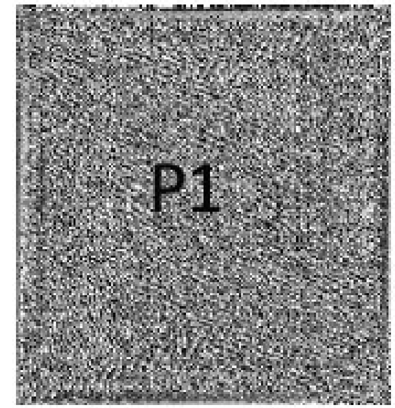
)

Quelques propriétés

- Mélange de la phase et du module

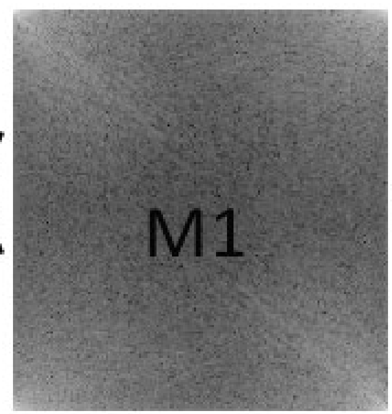
=TF-1(

x exp(i

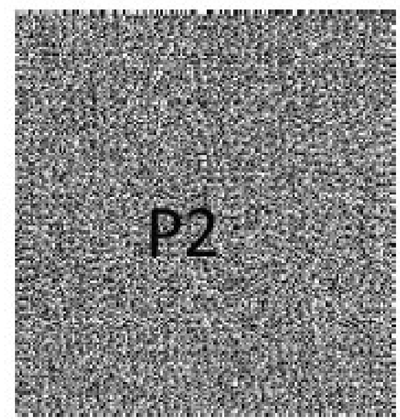


))

=TF-1(

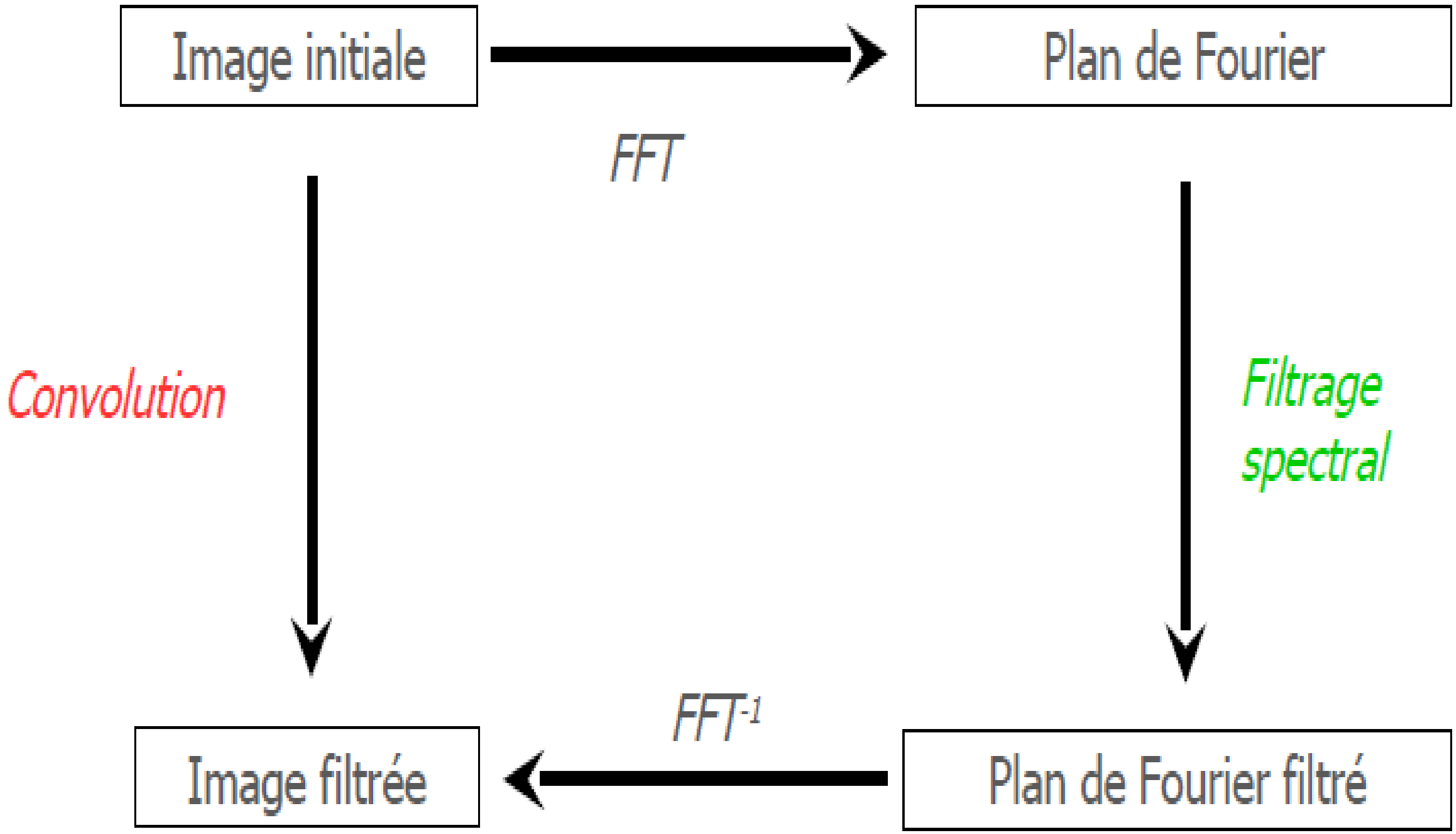


x exp(i



))

Filtrage Fréquentiel



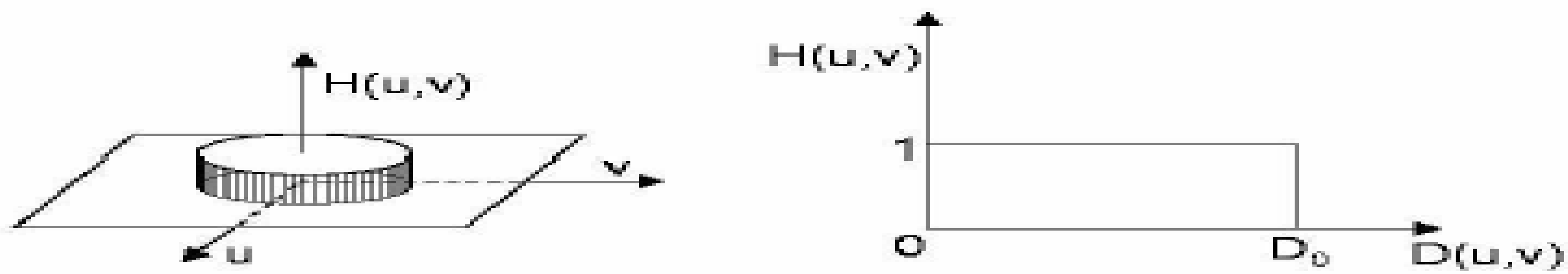
Filtrage Fréquentiel : filtre passe bas

FILTRAGE FRÉQUENTIEL
FILTRE PASSE-BAS IDÉAL (1)

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

$$D(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

D_0 : Fréquence de Coupure

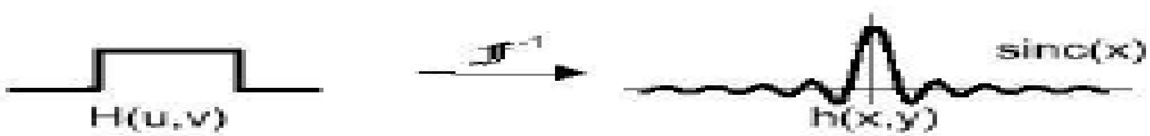


Problème

$$G(u,v) = F(u,v) \cdot H(u,v)$$

Convolution Theorm

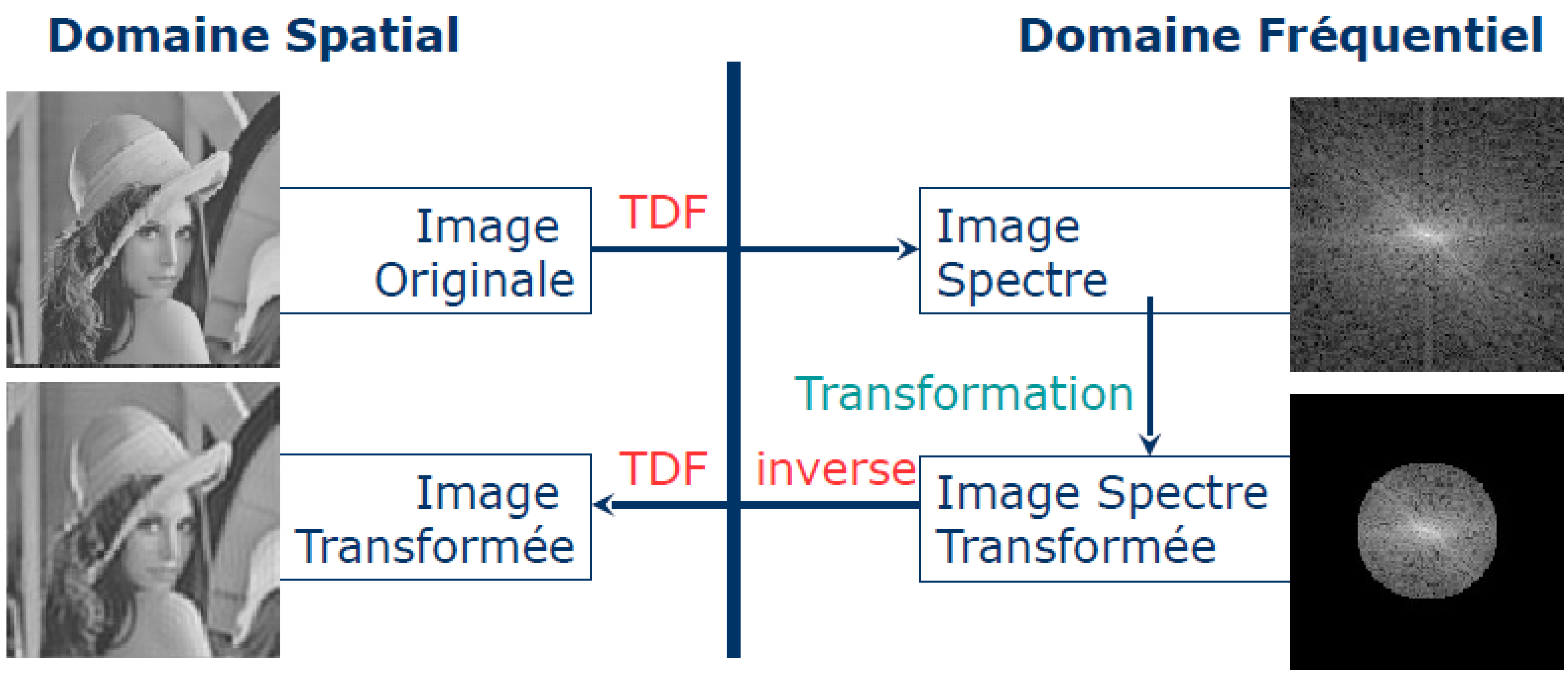
$$g(x,y) = f(x,y) * h(x,y)$$



Filtrage Fréquentiel : Filtrage passe-bas

Filtrage passe-bas :Un filtre passe-bas est un filtre qui laisse passer les basses fréquences et qui atténue les hautes fréquences, c'est-à-dire les fréquences supérieures à la fréquence de coupure.

Filtrage passe-bas



Filtrage Fréquentiel : filtre passe haut

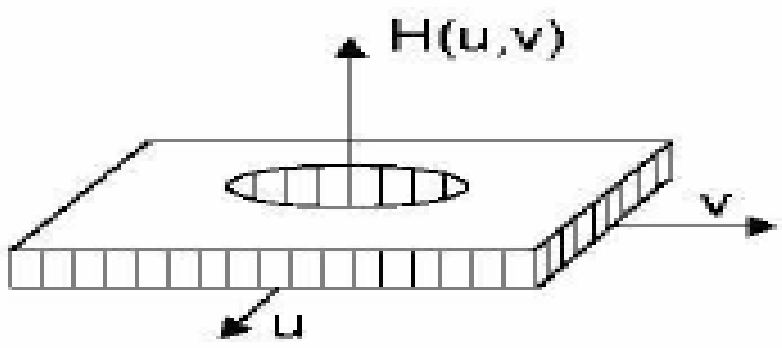
FILTRAGE FRÉQUENTIEL

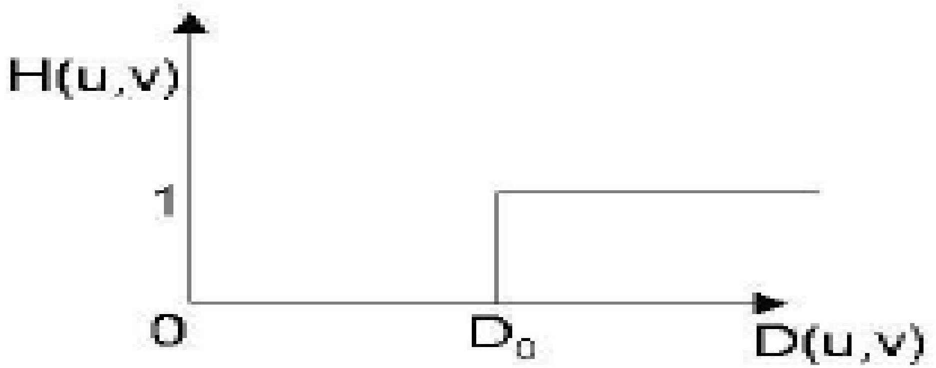
FILTRE PASSE-HAUT IDÉAL

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & D(u,v) \geq D_0 \\ 0 & D(u,v) < D_0 \end{cases}$$

$$D(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

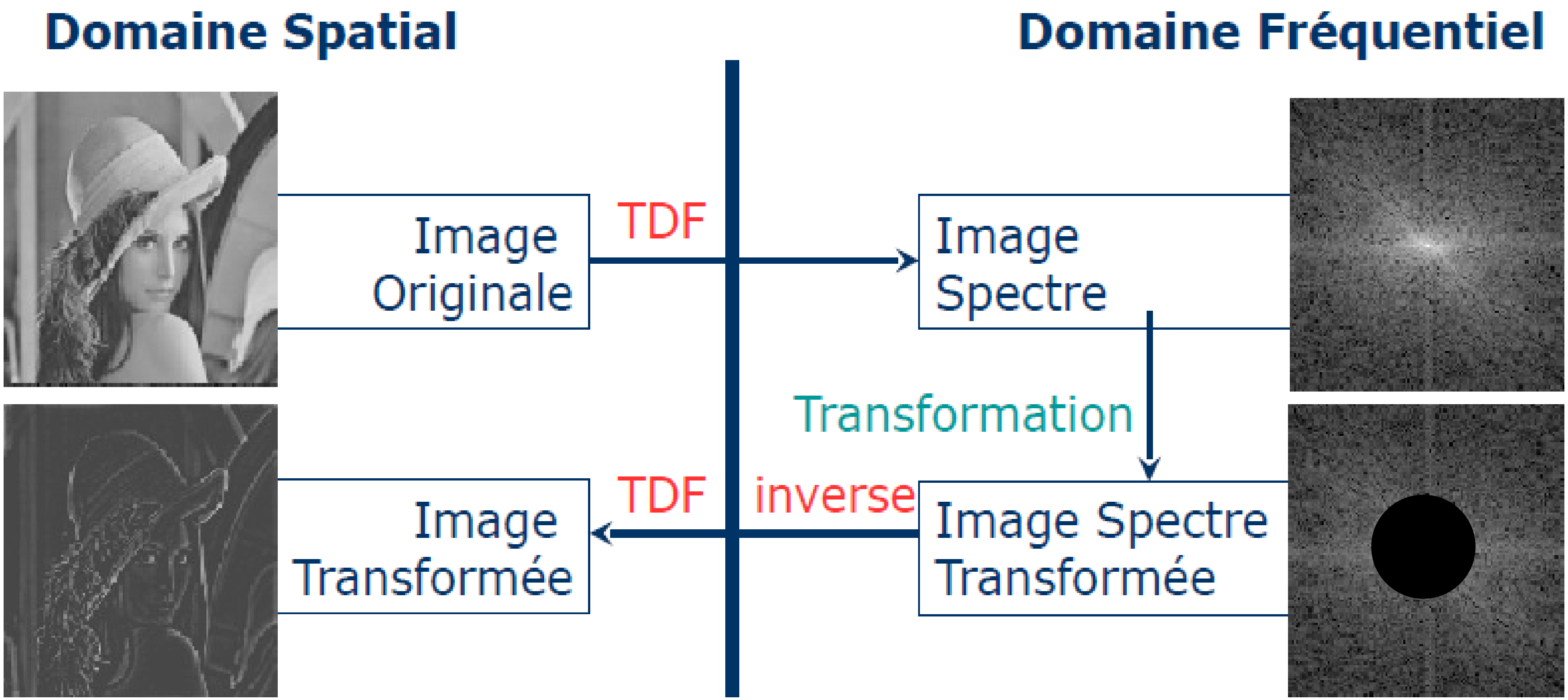
D_0 : Fréquence de Coupure





Filtrage Fréquentiel : filtre passe haut

Filtrage passe-haut



Filtrage Fréquentiel : filtre Passe Bande

FILTRAGE FRÉQUENTIEL

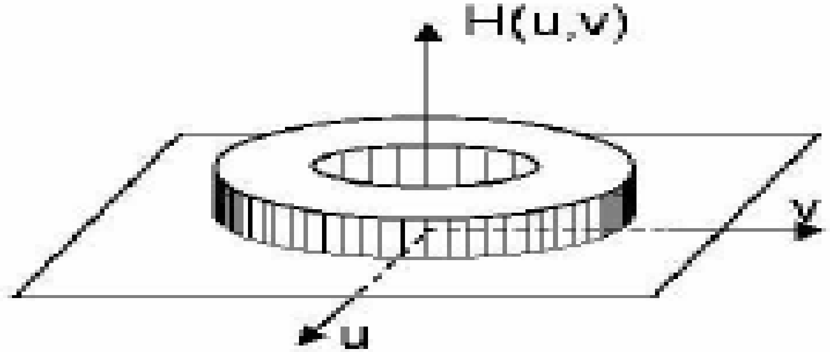
FILTRE PASSE-BANDE

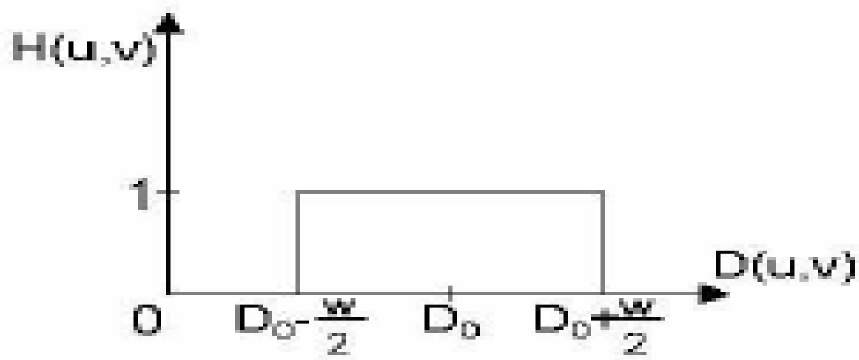
$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & D(u,v) \leq D_0 - \frac{w}{2} \\ 1 & D_0 - \frac{w}{2} < D(u,v) < D_0 + \frac{w}{2} \\ 0 & D(u,v) \geq D_0 + \frac{w}{2} \end{cases}$$

$$D(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

D_0 : Fréquence de Coupure

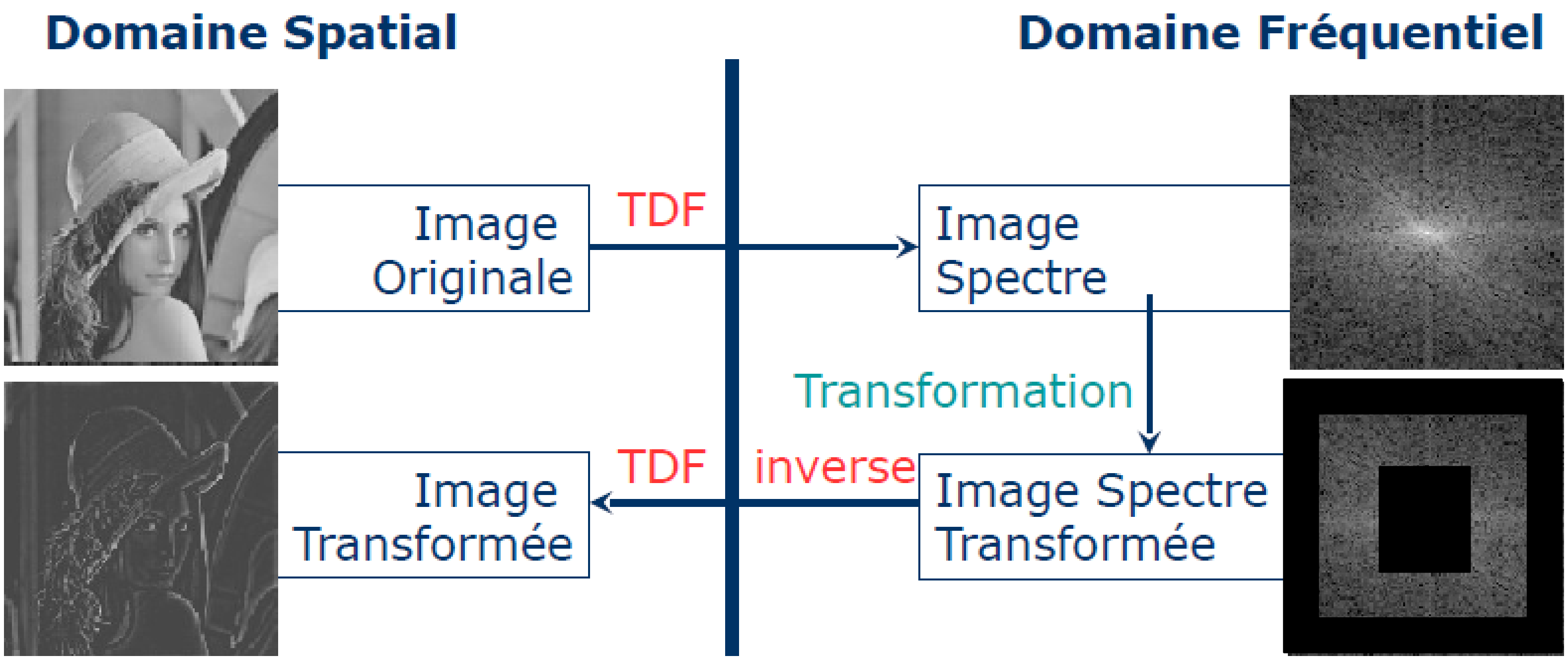
w : Largeur de Bande





Filtrage Fréquentiel : filtre Passe Bande

Filtrage passe-bande



Exemple : filtrage fréquentiel

Figure 11: a) filtre passe bas, b) filtre passe-haut, c)filtre passe bande