Introduction.

Historiquement, Leibniz, Euler et Cauchy sont parmi les premiers à avoir commencer à utiliser des quantités infiniment petites. Afin de mieux utiliser cette notion, Robinson a proposé en 1961, une autre approche, à savoir *l'analyse non standard.*

En 1977, Nelson a fourni une autre présentation de l'analyse non standard, appelée IST (Internal Set Theory), basée sur ZFC à laquelle s'ajoute un nouveau prédicat unaire appelé «standard». Suite à cela on a, dans l'univers d'IST, des objets mathématiques qui sont standard et des objets qui ne le sont pas; nous utilisons l'abréviation $st\,(x)$ pour indiquer que x est standard. De plus on décrit comme interne un ensemble (resp. un discours, une formule, ...) qui est exprimable dans le langage classique (ZFC) et comme externe un ensemble (resp. un discours, une formule, ...) qui est exprimable dans le langage non standard (IST) et qui fait intervenir le nouveau prédicat «standard» ou l'un de ses dérivés. L'utilisation du prédicat $st\,(.)$ est gouvernée par les axiomes : Idéalisation (I), Standardisation (S) et Transfert (T).

D'autre part, Nelson a montré que IST est une extension conservative de ZFC c'est-à-dire qu'elle n'est pas contradictoire, pourvu que ZFC ne le soit pas, et que toute formule de ZFC est vraie dans IST si et seulement si elle est vraie dans ZFC.

Références.

[1] F. Diener, G. Reeb: *Analyse Non Standard.* Enseignement des Sciences 40, Hermann, Paris, 1989. (In French.).
[2] Bruno Dinis, Imme van den Berg, *Neutrices and External Numbers A Flexible Number System*, CRC Press Taylor & Francis Group 2019.
[3] Alain Robert, *Analyse Non Standard.* Presses polytechniques romandes, 1985.

Chapitre 1
Principes d'idéalisation, standardisation et de transfert

Principe d'idéalisation (I)

Le principe d'idéalisation est le premier axiome qui a été posé par E. Nelson postule l'existence des éléments non standard (ou charmés) dans tout ensemble infini el que $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, ..., . Dans ce qui suit, un ensemble fini signifie un ensemble qui possède un nombre fini d'éléments, c'est-à-dire qu'il est possible de compter ses éléments et le nombre de ses éléments dans ce cas est un nombre entier. Un ensemble infini est un ensemble qui n'est pas fini.

Avant d'énoncer le principe d'idéalisation on donne les définitions et notations suivantes

Définition 1.1. On dit qu'une formule interne est une formule standard si toutes les constantes de cette formule sont standard.

Définition 1.2. Une variable est dite libre si elle n'apparaît pas dans le champ d'un quantificateur, liée sinon.

Notations 1.1

$fini(x)$ signifie que l'ensemble x est fini.
$\exists^{fini}(x)F(x)$ est une abréviation de $\exists x[fini(x)\ et\ F(x)]$.
$\forall^{fini}(x)F(x)$ est une abréviation de $\forall x[fini(x) \implies F(x)]$.
$\forall^{stfini}(x)F(x)$ est une abréviation de $\forall x[(st(x)\ \&\ fini(x)) \implies F(x)]$.

Principe (I). *Pour toute formule interne B, contenant au moins deux variables libres x et y, on a*

$$\forall^{stfini}z\exists x\forall y \in zB(x,y) \iff \exists x\forall^{st}yB(x,y). \tag{I}$$

Le membre de gauche de (I) indique une propriété de $B\,(.,.)$, connue sous le nom de concourante.

Théorème 1.1. $\mathbb{N}$ *contient des entiers charmés (i.e. des entiers non standard).*

Preuve. Considérons la relation $B(x,y) = (x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$ et $y < x)$. Soit maintenant $z \subset \mathbb{N}$ une partie standard et finie, on peut trouver donc un élément $x \in \mathbb{N}$ majorant strictement z i.e. $x > y$ pour tout $y \in z$. D'où le membre de gauche de (I) est vérifié. Par conséquent le membre de droite de (I) affirme l'existence d'un entier x majorant strictement tout les entiers standard y. Alors x est charmé (car x est différent de tout entier standard).

Théorème 1.2. (Nelson). *Pour tout ensemble E, il existe un ensemble fini F contenant tous les éléments standard de E.*

Preuve. Ce théorème découle immédiatement du principe d'idéalisation appliqué à la relation $B(F,y) = (fini(F)$ et $y \in F)$ qui est clairement interne et concourante.

Exemple. Dans tout ensemble infini E, il y a au moins un élément non standard.

Preuve. Méthode 1. Nous déduisons ceci du théorème 1.2.

Méthode 2. Soit E un ensemble infini. Définissons sur E la relation

$$B(x,y) = (x \in E \text{ et } y \in E \text{ et } x \neq y).$$

Soit maintenant $z \subset E$ une partie standard et finie. Prenons un élément $x \in E \setminus z$ ceci est possible car $E \setminus z$ est infini. Alors $\forall y \in z$ on a $x \neq y$. D'où le membre de gauche de (I) est vérifié. Par conséquent le membre de droite de (I) affirme l'existence d'un entier $x \neq y$ quelque soit $st(y) \in E$.

Principe de standardisation (S). *Pour toute formule standard $F(z)$ (interne ou externe), on a*

$$\forall^{st} x \exists^{st} y \forall^{st} z \left[z \in y \iff z \in x \,\&\, F(z) \right]. \tag{S}$$

- Le principe (S) associe à l'ensemble $A = \{z \in x \mid F(z)\}$ un ensemble standard y ayant pour éléments standard les éléments standard de A. L'ensemble y est appelé le standardisé de $A = \{z \in x \mid F(z)\}$ et on écrit $y = {}^{s}A$. A et y ont les mêmes éléments standard par contre on ne sait rien sur leurs éléments non standard.

Principe de transfert
Notations 1.2

- $\forall^{st} x F(x)$ signifie $\forall x \left[st(x) \Rightarrow F(x) \right]$.

- $\exists^{st} x F(x)$ signifie $\exists x\,[st(x)\ \&\ F(x)]$.

Principe de transfert (version faible : $\mathbf{T}_f$). *Pour toute formule standard $F(x)$ ne comportant aucune autre variable libre que x, on a l'énoncé suivant*

$$\forall^{st} x F(x) \implies \forall x F(x) \tag{T_f}$$

(ou, de façon équivalente, $\exists x F(x) \Rightarrow \exists^{st} x F(x)$).

Principe de transfert (version générale : $\mathbf{T}_g$). *Pour toute formule standard $F(x,\, t_1,\ldots,\, t_n)$ n'ayant pas d'autres variables libres que $x,\, t_1, \ldots, t_n$, on a l'énoncé suivant*

$$\forall^{st} t_1, t_2, \ldots, t_n \left[\forall^{st} x F(x, t_1, \ldots, t_n) \implies \forall x F(x, t_1, \ldots, t_n)\right] \tag{T_g}$$

(ou, de façon équivalente, $\forall^{st} t_1, t_2, \ldots, t_n\,[\exists x F(x, t_1, \ldots, t_n) \implies \exists^{st} x F(x, t_1, \ldots, t_n)]$).

Nous allons utiliser (T) pour montrer que certains objets mathématiques sont standard.

Théorème 1.3. *L'ensemble vide est un ensemble standard.*

Preuve. L'ensemble vide est défini par le premier axiome de ZFC qui s'écrit

$$\exists x\,[\forall y\,(y \notin x)]\,.$$

La formule entre crochets est standard (interne, sans constante) et ne contient pas d'autre variable libre que x (y est une variable liée). Donc, par transfert on a:

$$\exists^{st} x_0\,[\forall y\,(y \notin x_0)]\,.$$

Mais $\emptyset$ est unique (en vertu du deuxième axiome de ZFC, l'axiome d'extension), donc nécessairement $x_0 = \emptyset$.

Corollaire 1.1. *Les entiers* $0,\ 1,\ 2,\ 3$ *sont standard.*

Preuve. Par définition ($0 = \emptyset,\ 1 = \{\emptyset\},\ 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ 3 = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$), on voit que chacun de ces entiers est définis au moyen de $\emptyset$ et de quelques axiomes de ZFC qui sont des formules standard et il est unique, d'où le corollaire.

Remarque 1.1. Pour les mêmes raisons, il découle du théorème que 4, 5, 6, ..., 100, 10^{20}, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, ..., cos, ... sont des objets standard. On a alors la règle suivante

Règle 1.1. *Tous les objets spécifiques des mathématiques classiques sont standard.*

il ne résulte pas de cette règle que tous les objets sont standard. On sait déjà que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ qui sont standard comme des ensembles ils contiennent des éléments non standard (Principe (I)).

Exemples

1) Deux ensembles standard sont égaux si et seulement s'ils ont mêmes éléments standard.

Preuve. ($\Longrightarrow$) Evidente.

($\Longleftarrow$) Soient x et y deux ensembles standard ayant mêmes éléments standard. Alors

$$\forall^{st} z(z \in x \iff z \in y).$$

La formule entre parenthèses est standard puisque, par hypothèse, x et y sont standard et ne contient aucune autre variable libre qu z. Donc, par transfert, on a

$$\forall z(z \in x \iff z \in y).$$

D'où $x = y$ (en vertu du deuxième axiome de ZFC, l'axiome d'extension).

2) Une fonction standard est continue si et seulement si elle est continue en tout point standard.

Preuve. ($\Longrightarrow$) Evidente.

($\Longleftarrow$) Soit f une fonction standard telle que

$$\forall^{st} x[f \text{ est continue au point } x].$$

La propriété entre crochets étant standard, on a, par transfert

$$\forall x[f \text{ est continue au point } x].$$

3) Une fonction standard est dérivable si et seulement si elle est dérivable en tout point standard.

Preuve. ($\Longrightarrow$) Evidente.

($\Longleftarrow$) Soit f une fonction standard telle que

$$\forall^{st} x[f \text{ est dérivable au point } x].$$

La propriété entre crochets étant standard, on a, par transfert

$$\forall x[f \text{ est dérivable au point } x].$$

4) Une fonction standard prend des valeurs standard aux points standard.

Preuve. Soit f une fonction standard. On a

$$\forall x \exists y[y = f(x)].$$

Alors

$$\forall^{st} x \exists y[y = f(x)].$$

La propriété entre crochets étant standard, on a par transfert,

$$\forall^{st} x \exists^{st} y[y = f(x)].$$

5) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction standard. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une racine si et seulement si elle admet une racine standard i.e.

$$\exists x\, [f\,(x) = 0] \iff \exists^{st} x\, [f\,(x) = 0]$$

Preuve. ($\Longleftarrow$) Evidente.

($\Longrightarrow$) La propriété entre crochets étant standard, on a par transfert,

$$\exists^{st} x[f(x) = 0].$$

Théorème 1.4. *Soit E un ensemble donné. Alors*

E est standard et fini ssi tous ses éléments standard.

Preuve.

Considérons les équivalences

$$\begin{array}{ccc} \exists x \in E \text{ et } x \text{ charmé} & \iff & \exists x \in E \forall^{st} y \,(x \neq y) \\ & & \Updownarrow (I) \\ & & \forall^{st fini} z \; \exists x \in E \; \forall y \in z \;\; (x \neq y) \\ & & \Updownarrow \\ & & \forall^{st fini} z \; E \text{ n'est pas contenu dans } z. \end{array}$$

Par complémentarité, on obtient

$$\text{tout } x \text{ de } E \text{ est standard} \iff \exists^{st fini} z \; E \subset z. \tag{1}$$

Par conséquent si, E est standard et fini, on peut prendre $z = E$ et il en résulte

$$E \text{ standard fini} \implies \text{tout } x \text{ de } E \text{ est standard.} \tag{2}$$

C'est-à-dire on a prouvé le sens ($\implies$).

Inversement, si tout x de E est standard, de (1) on peut prendre z standard fini contenant E. Or

z standard (fini) $\underset{(T)}{\implies}$ $\mathcal{P}(z)$ standard (fini) $\underset{(2)}{\implies}$ E est standard

car $E \in \mathcal{P}(z)$. De plus E est fini car $E \subset z$ et z fini.

Corollaire 1.2. *Tout entier majoré par un entier standard est standard.*

Preuve. Soit q un entier standard. L'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à q est standard et fini, donc d'après le Théorème 2.1. tous ses éléments sont standard.

Exercices.

1) Soit ω un entier naturel non standard. Existe-t-il un entier standard supérieur ou égal à ω?

2) Soit E un ensemble standard infini et $F \subset E$ une partie finie contenant *tous les éléments standard de E*. Montrer qu'il existe une partie finie $\widetilde{F} \underset{\neq}{\subset} F \subset E$

contenant *tous les éléments standard de E.*

Les deux principes suivants sont des versions affaiblies du principe de standardisation, utiles dans les applications

Principe de récurrence externe. *Pour toute formule $F(n)$ interne ou externe, on a*

$$\left[F(0)\ \&\ \forall^{st} n\,(F(n) \implies F(n+1))\right] \implies \forall^{st} n F(n)\,.$$

Preuve. L'ensemble $E = {}^{s}\{n \in \mathbb{N} \mid F(n)\}$ est un ensemble standard contenant 0, tel que

$$\forall^{st} n\,[n \in E \implies n+1 \in E]\,.$$

Par transfert, il satisfait donc à l'axiome de récurrence classique, d'où $E = \mathbb{N}$. Comme $\{n \in \mathbb{N} \mid F(n)\}$ a mêmes éléments standard que E, il contient tout n standard.

Principe d'extension. *Soient X et Y deux ensembles standard, ${}^{\sigma}X$ et ${}^{\sigma}Y$ les sous ensembles (externes) constitués des éléments standard de X et de Y respectivement. Si à tout $x \in^{\sigma} X$, on peut associer un unique $y = f(x) \in {}^{\sigma}Y$, alors il existe une unique application standard $\widetilde{f} : X \to Y$ qui prolonge f à tout X.*

Définitions 1.3.

Nous avons montré dans le chapitre 1 qu'il existe des entiers non standard (charmés) et qui sont supérieur à tout entier standard. Suite à ceci nous posons les définitions suivantes

• Un entier est illimité s'il est supérieur à tout entier standard.

Dans $\mathbb{R}$,on distingue plusieurs sortes de nombres standard ou non standard

• Un réel est illimité si sa valeur absolue est supérieure à tout entier standard.

• Un réel est limité si sa valeur absolue est inférieure à un entier standard au moins.

• Un réel est infinitésimal si sa valeur absolue est inférieure à tout réel standard strictement positif.

• Un réel est appréciable s'il est limité et non infinitésimal.

• Deux réels sont équivalents si leur différence est infinitésimale.
• Deux réels sont asymptotiques si leur rapport est équivalent à 1.

Notations. On emploie les notations suivantes :
• $x \cong y$ pour x est équivalent à y ou $x - y$ est infinitésimal.
• $x << y$ y pour x est inférieur et non équivalent à y.
• $|x| \cong \infty$ ou $x \cong +\infty$ pour x est illimité ou x est illimité et positif.
• $|x| << \infty$ ou $x << +\infty$ pour x est limité ou x est limité ou négatif.
• $z \sim y$ pour x et y sont asymptotiques.

Les nombres non standard vérifient toutes les règles de calcul auxquelles on s'attend. En voici quelques une que l'on pourra montrer:

Exemple. Pour a et b réels limités, $a \ncong 0$, ϵ et η infinitésimaux, ω réel illimité

$$\epsilon + \eta \cong 0 \qquad \epsilon.\eta \cong 0 \qquad a\epsilon \cong 0$$

$$a + \epsilon \cong a \qquad a + \omega \cong \infty \qquad a\omega \cong \infty$$

$$\frac{a}{\omega} \cong 0 \qquad |a + b| << \infty \qquad |ab| << \infty$$

Montrons par exemple que $\epsilon.\eta \cong 0$ est infinitésimale. En effet, soit $r > 0$ standard. Comme$\sqrt{r}$ est également standard, on a $|\epsilon.\eta| < \sqrt{r}.\sqrt{r} = r$.

Exemple

Soit ω un entier naturel illimité, ϵ un réel infiniment petit positif.
1) Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie standard. Alors ${}^{s}A = A$.
2) ${}^{s}\{z \in \mathbb{N} \mid z < \omega\} = \mathbb{N}$ et ${}^{s}\{z \in \mathbb{N} \mid z > \omega\} = \emptyset$.
3) ${}^{s}\{z \in \mathbb{N} \mid z < \omega\} = {}^{s}\left\{z \in \mathbb{N} \mid z < \left[\frac{\omega}{2}\right]\right\} = {}^{s}\left\{z \in \mathbb{N} \mid z < \left[\frac{\omega}{3}\right]\right\} = \mathbb{N}$ ($[x]$ signifie la partie entière de x).
4) ${}^{s}]1 - \epsilon, 2 + 2\epsilon[= [1, 2]$.

Théorème 1.5. (Définition de l'ombre d'un réel). *Pour tout réel limité x, il existe un unique réel standard ${}^{0}x$ tel que $x \simeq {}^{0}x$. Ce réel s'appelle l'ombre de x ou encore la partie standard de x.*

Preuve. *Unicité.* Supposons, pour x réel limité, ils existent deux ombres x_0 et x_1, on aurait $x_0 \simeq x \simeq x_1$. D'où le réel $x_0 - x_1$ serait à la fois standard (car x_0 et x_1 le sont) et infinitésimal. Donc $x_0 = x_1$.

Existence. Supposons que x est un réel limité que l'on prend, par exemple, positif i.e. $x > 0$ et considérons l'ensemble

$$E = {}^{s}\{t \in \mathbb{R} \mid t < x\}.$$

Comme x est limité, il existe r standard tel que $x < r$. Donc

$$\forall^{st} t \in E \ t < r$$

d'où, par transfert,

$$\forall t \in E \ t < r.$$

L'ensemble standard E est donc majoré et non vide (car $0 \in E$) : il possède une borne supérieure a, qui est standard. Montrons que $a \simeq x$. Sinon

- soit il existe un standard $y > 0$ tel que $x - a > y$, et dans ce cas $a + y$ serait un élément standard de E ce qui est absurde;
- soit il existe un standard $y > 0$ tel que $a - x > y$, et dans ce cas, on aurait $\forall^{st} t \in E$, $t < a - y$, d'où par transfert, $\forall t \in E$, $t < a - y$, ce qui est absurde.

Le cas $x < 0$ se traite d'une façon pareille.

Définition 1.4. *Un réel qui possède une ombre est appelé presque standard. Si A est une partie de $\mathbb{R}$, on dit qu'un réel $x \in A$ est presque standard dans A si x est presque standard et si son ombre appartient à A.*

Exercices.

1) Pour tout x et y réels limités, on a

${}^{0}(x + y) = {}^{0}x + {}^{0}y$

${}^{0}(xy) = {}^{0}x \, {}^{0}y$

si ${}^{0}x \neq 0$, ${}^{0}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{{}^{0}x}$

$x \leq y \implies {}^{0}x \leq {}^{0}y$

Montrons par exemple que l'ombre de la somme égal à la somme des deux ombres: $x + y = ({}^{0}x + \phi_x) + ({}^{0}y + \phi_y)$ où ϕ_x et ϕ_y sont deux infiniment petits. D'où $x + y = ({}^{0}x + {}^{0}y) + (\phi_x + \phi_y)$. Alors, parce que $\phi_x + \phi_y \simeq 0$, ${}^{0}(x + y) = {}^{0}x + {}^{0}y$.

Le théorème précédent se généralise à $\mathbb{R}^n$ pour tout n standard où :

• Un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est standard si et seulement si ses composantes le sont.

• Un vecteur limité $V = (v_1, ..., v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est limité si toutes ses composantes soient limitées.

• Donc un vecteur limité $V = (v_1, ..., v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ possède une ombre , ${}^0V$: c'est le vecteur ayant pour coordonnées $({}^0v_1, ...,{}^0 v_n)$.

• Si $V = (v_1, ..., v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ un vecteur limité appartient à un sous espace standard E de $\mathbb{R}^n$, alors ${}^0V$ appartient aussi à E. En effet, si $(V_1, ..., V_p)$ e st une base standard de E, et si $V = v_1V_1 + ... + v_pV_p$,on a:

$$
{}^0V ={}^0 (v_1V_1 + ... + v_pV_p) = {}^0v_1 \ {}^0V_1 + ... + {}^0v_p \ {}^0V_p = {}^0v_1V_1 + ... + {}^0v_pV_p
$$

donc ${}^0V \in E$.

Ceci permet de montrer le théorème suivant

Theorème 1.6. (décomposition de Goze). *Soit n un entier standard. Pour tout vecteur V de R^n, de partie standard V_0, il existe une base standard $\{V_1, ..., V_n\}$ et n infinitésimaux $(\epsilon_1, ..., \epsilon_n)$ tels que*

$$
V = V_0 + \epsilon_1V_1 + \epsilon_1\epsilon_2V_2 + ... + \epsilon_1\epsilon_2...\epsilon_nV_n.
$$

Ces notions et concepts peuvent se généraliser aux cas des espaces métriques. En effet soit (E, d) un espace métrique standard; i.e. E et d sont standard. Alors:

• Deux éléments x et y de E sont équivalents, $x \simeq y$, si $d(x, y) \simeq 0$.

• Un élément x possède une ombre ou partie standard, notée ${}^0x$, ou encore qu'il est presque standard (respectivement presque standard dans une partie A de E) s'il existe un standard de E (respectivement de A), noté ${}^0x$, tel que $x \simeq {}^0x$.

• Un élément est limité s'il existe un élément standard y dans E tel que $d(x, y)$ soit limitée.

• Une partie $A \subset E$ est presque standard (resp. limitée) si tous ses éléments sont presque standard (resp. limités).

• La notion de partie limitée est l'équivalent non standard de la notion de partie bornée.

Exercices.

1$^{\text{ière}}$Partie

Exo 1. Soit ω un entier positif charmé (non standard) et soit ϵ un infinitésimal strictement positif. Dire, pour chacun des nombres suivant, lequel est standard : 10, -17, $\dfrac{3}{2}$, 0.1234567891011, $(0.1234567891011)^{\omega}$, $(10^{\omega})^{\frac{1}{\omega}}$, $\sqrt{2}$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\left(\dfrac{\sin(\omega x)}{\omega x}\right)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\left(\dfrac{\sin(\omega x)}{\omega x}\right)+\epsilon$, $\epsilon\left(\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\left(\dfrac{\sin(\epsilon x)}{\epsilon x}\right)\right)-\epsilon$.

Exo 2. Soit ω un entier positif charmé (non standard). Ordonner les nombres suivants : 10000000, ω, $\dfrac{1}{\omega}$, $log(\omega)$, $e^{-\omega}$, ω^{ω}, $\sqrt{\omega}$, $\omega!$, e^{ω}.

Exo 3. Dire, dans chaque cas, si l'ensemble est standard ou non.
$A_1=\{4,\ 7,\ 123\}$; $A_2=\left\{1,\ 2,\ \sin\left(3\sqrt[N]{2\pi}\right)\right\}\subset\mathbb{R}$; $A_3=\{1,\ 2,\ 4+\epsilon\}$, $A_4=\mathbb{R}\backslash\{\epsilon\}$.
où ϵ est un infinitésimal positif et N un entier standard positif.

Exo 4. Soient ω_1 et ω_2 deux entiers illimités positifs tels que $\omega_1\neq\omega_2$. Dire pourquoi les deux ensembles $L_1=\{0,1,2,...,\omega_1\}$ et $L_2=\{0,1,2,...,\omega_2\}$ ne sont pas égaux malgré qu'ils ont les mêmes éléments standard.

Exo 5. Démontrer qu'il existe une application $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que

$$\forall^{st} g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}\text{ on a } f(x)\geq g(x).$$

La fonction f est-elle standard ? Unique ? Peut-elle prendre des valeurs négatives ?

Exo 6. Soit E un ensemble standard infini et $F\subset E$ une partie finie contenant *tous les éléments standard de E*. Montrer qu'il existe une partie finie $\widetilde{F}\underset{\neq}{\subset}F\subset E$ contenant *tous les éléments standard de E*.

Exo 7. a) Montrer que, si $F\subset\mathbb{R}$ est un ensemble fini qui contient tous les standard de $\mathbb{R}$, toute fonction standard f, définie sur $\mathbb{R}$ est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur F.
b) Etudier le raisonnement suivant et dire pourquoi il est faux: " Toute fonction standard est un polynôme : en effet soit $f(x)$ une fonction standard et soit $p(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange, égal à f en tout point de F. Comme les fonctions p et f coïncident en tout point standard, elles sont égales. Donc $f(x)$ est un polynôme. "

Exo 8 On dit qu'une famille interne d'ensembles internes $(A_i)_{i\in I}$ possède la propriété d'intersection finie si, pour toute partie finie Z de I, $Z=$

$\{i_1, i_2, ..., i_n\}$, on a $\underset{i \in Z}{\cap} A_i \neq \emptyset$. Montrer qu'une famille $(A_i)_{i \in I}$ qui possède la propriété d'intersection finie, possède également la propriété suivante : $\cap \{A_i \mid i \in I \text{ et } st\,(i)\} \neq \emptyset$.

Exo 9. Existe-t-il dans le plan xoy une droite standard D qui passe par le point $(1, \epsilon)$ où ε est un réel infiniment petit positif.

Exo 10. Soient E un espace topologique standard et x un élément standard de E. Montrer qu'il existe un voisinage de x contenu dans tous les voisinages standard de x. Donner un exemple d'un tel voisinage dans le cas où E est un espace métrique.

2$^{\text{ième}}$partie

Exo 11. Trouver les standardisés des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ ($\varepsilon \simeq 0$ positif et $\omega \cong +\infty$ un entier).

$B_1 =]-1+\varepsilon, 1]$.

$B_2 = {}^s\{x \mid x \in \mathbb{Q} \cap F \ \& \ 0 \leq x < 1\}$, où F est un ensemble fini contenant tous les standard de $\mathbb{R}$.

$B_3 = {}^s\{(x, x^{2\omega+1}) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$B_4 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \ \forall \partial \cong 0 \ f(x+\partial) \cong f(x)\}$.

Exo 12. Soient x et y deux réels limités. Montrer que

$$^0(xy) = {}^0x.{}^0y, \ {}^0\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{^0x}{^0y} \text{ si } {}^0y \neq 0.$$

Exo 13. Soit $\xi \neq 0$ un réel non standard appréciable. Soit F une partie finie de $\mathbb{Q}$ contenant tout les éléments standard de $\mathbb{Q}$.

a- Montrer que $\forall n \geq 1$, $n\xi$ n'est pas standard.

b- Déduire que $\mathbb{R} \backslash \{n\xi \mid n \geq 1\}$ n'est pas standard.

c)- Trouver le standardisé de $\mathbb{R} \backslash \{n\xi \mid n \geq 1\}$.

3$^{\text{ième}}$partie

Exo 14. Montrer que deux ensembles standard sont d'intersection vide si et seulement s'ils n'ont aucun élément standard en commun.

Exo 15. Est-il vrai qu'une fonction standard $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si elle est bornée aux points standard? Est-il vrai qu'une fonction qui ne prend que des valeurs standard aux points standard est une fonction standard ?

Exo 16. Montrer que, pour une fonction standard, l'image réciproque d'un point standard est standard. Cette image réciproque peut-elle contenir des points non standard ?

Exo 17. Montrer que si A est un sous-ensemble standard de $\mathbb{R}^2$ alors ses deux projections sur l'axe des x et l'axe des y sont des sous-ensembles standard de $\mathbb{R}$. La réciproque est-elle vraie ?

Exo 18. Parmi les "transferts" suivants, quelques-uns sont illégaux : lesquels et pourquoi ? ($\epsilon \simeq 0$, $\epsilon > 0$ et $\omega \simeq +\infty$ sont donnés).

a) L'ensemble des réels standard est un ensemble borné (par $\omega \simeq +\infty$) . Donc il est borné par un standard.

b) Il existe un réel dans $]-\epsilon, 0[$ alors Il existe un réel standard dans cet intervalle(ie dans $]-\epsilon, 0[$).

c) Il existe une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui passe par le point $(1, \omega)$ alors Il existe une fonction standard $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui passe par ce point.

d) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction standard. Si $f \simeq 0$ sur un voisinage de $x = 0$ alors il existe un voisinage standard de $x = 0$ sur lequel $f \simeq 0$.