Chapitre 2
Diverses Applications

Définition 3.1.(s-continuité). Une fonction interne $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite S-continue en un point x de $\mathbb{R}$ si, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y \simeq x$ implique $f(y) \simeq f(x)$.

Théorème 3.1. (critère de continuité). *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction standard et x_0 un réel standard. Alors f est continue au point x_0 si et seulement si*

$$\forall \delta \cong 0 \ f(x_0 + \delta) \cong f(x_0).$$

Preuve. ($\Longrightarrow$) De la continuité de f en x_0 on déduit

$$\forall^{st} \epsilon > 0 \exists \eta > 0 [\forall x \ \ |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon].$$

D'où par le transfert

$$\forall^{st} \epsilon > 0 \exists^{st} \eta > 0 [\forall x \ \ |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon].$$

Donc, pour tout $\delta \cong 0$, la formule précédente appliquée à $x = x_0 + \delta$ entraîne

$$\forall^{st} \epsilon > 0 \ \ |f(x_0 + \delta) - f(x_0)| < \epsilon$$

d'où $f(x_0 + \delta) \cong f(x_0)$.
($\Longleftarrow$) On déduit de l'hypothèse que la formule

$$\forall^{st} \epsilon > 0 \, [\exists \eta > 0 \ \forall x \ \ |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon]$$

est vérifiée. En effet il suffit de choisir $\eta \cong 0$. D'où, par transfert

$$\forall^{st} \epsilon > 0 \, [\exists \eta > 0 \ \forall x \ \ |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon] \, .$$

Corollaire 3.1. *Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction standard et $x \in \mathbb{R}$ un réel standard. Alors*

$$f \text{ continue en } x \iff f \ \text{ S-continue en } x.$$

Preuve. Elle découle immédiatement du théorème 3.1.

Théorème 3.2.(Critère de continuité uniforme). *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction standard. Alors* f *est uniformément continue* sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall x\ \forall \delta \cong 0\ f(x+\delta) \cong f(x).$$

Preuve. ($\Longrightarrow$) De la continuité uniforme de f sur $\mathbb{R}$, on déduit que

$$\forall^{st}\epsilon > 0\ \exists \eta > 0[\forall x\ \forall y\ \ |x-y| < \eta\ \Longrightarrow\ |f(x) - f(y)| < \epsilon].$$

D'où, par le transfert,

$$\forall^{st}\epsilon > 0\ \exists^{st} \eta > 0[\forall x\ \forall y\ \ |x-y| < \eta\ \Longrightarrow\ |f(x) - f(y)| < \epsilon].$$

En particulier, comme $x + \delta \cong x$, on a donc

$$\forall^{st}\epsilon > 0\,|f(x+\delta) - f(x)| < \epsilon$$

d'où la conclusion.

($\Longleftarrow$) On déduit de l'hypothèse que la formule

$$\forall^{st}\epsilon > 0\,[\exists \eta > 0\ \forall x\ \forall y\ \ |x-y| < \eta\ \Longrightarrow\ |f(x) - f(y)| < \epsilon]\,.$$

est vérifiée. En effet il suffit de choisir $\eta \cong 0$. D'où, par transfert

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x\ \forall y\ \ |x-y| < \eta\ \Longrightarrow\ |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Dans la suite nous donnons quelques théorèmes concernant les fonctions S-continues, continues et continues uniformément.

Théorème 3.3 (Théorème de la valeur intermédiaire). *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $f(a) < 0$ *et* $f(b) > 0$*. Alors il existe* $c \in\,]a,b[$ *tel que* $f(c) = 0$*.*

Preuve. Par transfert, on suppose f standard (en particulier a et b seront standard). Soit

$$F = \{x_0, x_1, ..., x_N\}$$

un ensemble fini contenant tous les standard de $[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$.
Lemme. $x_{i-1} \simeq x_i$; pour $i = 1, 2, \_..., N$.

Preuve du lemme. Si ce lemme n'était pas vrai pour un certain i, le standard $\dfrac{^0x_{i-1} +^0 x_i}{2}$ n'appartiendrait pas à F, ce qui est absurde. Soit x_i le plus petit élément de F tel que $f(x_i) \geq 0$. $x_i \geq x_1$. On a $f(^0x_i) = 0$. En effet

$$\begin{array}{rcll} 0 & \leq & f(x_i) \simeq f(^0x_i) & \text{car } f \text{ est continue} \\ & = & f(^0x_{i-1}) & \text{car } ^0x_{i-1} = \ ^0x_i \\ & \simeq & f\,(x_{i-1}) & \text{car } ^0x_{i-1} = \ ^0x_i. \end{array}$$

D'où $f(^0x_i) \simeq 0$ car il est équivalent à la fois à des réels positifs et négatifs. Donc $f(^0x_i) = 0$ car f et ^0x_i sont standard. ^0x_i ne peut pas être égal' à a ni à b de plus il ne peut pas être strictement inférieure à a ni strictement supérieure à b du fait que a, b et ^0x_i sont standard et $^0x_i \simeq x_i$.
Théorème 3.4 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f atteint sa borne supérieure en un point de $[a,b]$.*
Preuve. Par transfert il suffit de montrer le théorème pour les fonctions f standard (en particulier a et b seront standard). Soit F un ensemble fini contenant les standard de $[a,b]$ et soit $\overline{x}$ un élément de F tel que $f(\overline{x}) = \max_{x\in F} f\,(x)$. Alors, comme $\overline{x} \in [a,b]$, $\overline{x}$ possède une ombre $x_0 \in [a,b]$ car x_0 ne peut pas être strictement inférieure à a ni strictement supérieure à b du fait que x_0, a et b sont standard et $\overline{x} \simeq x_0$.

Montrons que f atteint sa borne supérieure en x_0. Comme f est continue et standard, on a $f(\overline{x}) \simeq f(x_0)$. Donc

$$\forall^{st} x \in [a,b] \;\; f(x) \leq f(x_0) \text{ ou } f(x) \simeq f(x_0).$$

Mais f et x_0 étant standard, il en résulte que

$$\forall^{st} x \in [a,b] \;\; f(x) \leq f(x_0)$$

d'où par transfert

$$\forall x \in [a,b] \;\; f(x) \leq f(x_0).$$

Théorème 3.5 (critère de convergence d'une suite). *Soient (u_n) une suite standard de R et l un réel standard. Alors (u_n) converge vers l si et seulement si $u_n \simeq l$ pour tout $n \simeq +\infty$.*
Preuve. ($\Longrightarrow$) De la convergence de (u_n) vers l, on déduit que

$$\forall^{st}\epsilon > 0 \; \exists N \; \forall n[n > N \implies |u_n - l| < \epsilon].$$

D'où par le transfert, l et (u_n) étant standard,

$$\forall^{st}\epsilon > 0 \; \exists^{st} N \; \forall n[n > N \implies |u_n - l| < \epsilon]$$

donc, pour tout n illimité

$$\forall^{st}\epsilon > 0 \;\; |u_n - l| < \epsilon.$$

D'où $u_n \simeq l$ pour tout $n \simeq +\infty$.
($\Longleftarrow$) On déduit de l'hypothèse que la formule

$$\forall^{st}\epsilon > 0 \;\; [\exists N \; \forall n \, (n > N \implies |u_n - l| < \epsilon)]$$

est vérifiée; en effet, il suffit de choisir N illimité. Donc, par transfert

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \; \forall n \, (n > N \implies |u_n - l| < \epsilon) \, .$$

D'où (u_n) converge vers l.

Exercice. Etudier la convergence des suites dont le terme général est donné par
$\dfrac{n}{n^2+1}$, $(-1)^n$, $(-1)^n \dfrac{n}{n^2+1}$ et $\dfrac{\epsilon}{n}$ ($\epsilon > 0$ est un réel infinitésimal).
Théorème 3.6 (Critère de convergence d'une suite d'applications)
Soit (f_n) une suite standard d'applications de E dans F (F, comme E, est un espace métrique standard). On a les équivalences suivantes :
a) (f_n) converge simplement vers f si et seulement si

$$\forall^{st} x \; \forall n \simeq +\infty \; f_n(x) \simeq f\,(x)\,.$$

b) (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si

$$\forall x \; \forall n \simeq +\infty \; f_n(x) \simeq f\,(x)\,.$$

Preuve. a) Pa définition, (f_n) converge simplement vers f si et seulement si, pour tout

$x \in E$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$. Par transfert il suffit que ce soit vrai pour tout x standard, d'où la caractérisation indiquée.

b) ($\Longrightarrow$) De la convergence uniforme de (f_n) vers f, on déduit que

$$\forall^{st}\epsilon > 0\ \exists N\ [\forall x \in E\ n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon]$$

d'où par transfert

$$\forall^{st}\epsilon > 0\ \exists^{st} N\ [\forall x \in E\ n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon].$$

En particulier $\forall x \in E\ \forall n \simeq +\infty\ f_n(x) - f(x) \simeq 0$.

($\Longleftarrow$) On a par hypothèse :

$$\forall^{st}\epsilon > 0\ \exists N\ \forall x \in E\ [n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon].$$

En effet il suffit de choisir $N \simeq +\infty$. Il en résulte, par transfert que :

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N\ \forall x \in E\ [n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon].$$

C'est-à-dire (f_n) converge uniformément vers f.

Théorème 3.7 (critère de compacité pour les parties de $\mathbb{R}$).

Soit A un sous-ensemble standard de $\mathbb{R}$. A est relativement compact (resp. compact) si et seulement si tout élément de A est presque standard (resp. presque standard dans A).

Preuve. ($\Longrightarrow$) Puisque A est relativement compact (resp. compact), A est borné et donc, A étant standard , borné par un standard. C'est-à-dire

$$\exists^{st} r\ A \subset\ ]-r, r[\,.$$

En particulier tout élément de A est limité. Si de plus, A est compact, son complémentaire A^c dans $\mathbb{R}$ est ouvert. D'où

$$\forall^{st} y \in A^c\ \exists s > 0\ B\,(y, s) \subset A^c.$$

Donc, s'il existait $x \in A$ tel que ${}^0x \in A^c$, on aurait par transfert

$$\exists^{st} s > 0\ B\left({}^0x, s\right) \subset A^c.$$

Mais, comme $x \simeq {}^0x$, il en résulte que $x \in A^c$, ce qui est absurde.
($\Longleftarrow$) Réciproquement, si tout élément de A possède une ombre, A est borné car il existe N, tel que $A \subset [-N, +N]$: il suffit de choisir N illimité. De plus

, si tout élément de A possède une ombre dans A, A En effet, s'il existait $x \simeq y$, $x \in A$, on aurait ${}^0x \in A$, ce qui est absurde. D 'où le critère de compacité.

Théorème 3.8 *Soit* $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue avec* A compact*. Alors* f *est uniformément continue sur* A*.*
Preuve. Par transfert il suffit de montrer le théorème en supposant que f et A sont standard. Soient x et y deux éléments équivalents de A ($x \simeq y$). D'après le théorème 3.7 il existe un élément unique ${}^0x \in A$ tel que $x \simeq {}^0x$. D'où $x \simeq {}^0x \simeq y$. Du fait que f et ${}^0x$ sont standard et f continue en ${}^0x$ on a, par le théorème 3.1, $f(x) \simeq f({}^0x) \simeq f(y)$. Donc f est uniformément continue sur A.

Exercice.
Vérifier que $]0,1[$ n 'e st pa compact. L'intervalle $[0,\omega]$, pour ω illimité, est -il compact?

Avant de donner le critère non standard de compacité pour les parties d'un espace métrique standard E, nous donnons l'exemple suivant qui montre que la propriété : "dans $\mathbb{R}$ tout élément limité est presque standard " ne se généralise pas en général au cas des espaces métriques standard.

Exemple. Soit l_∞ l'espace des suites réelles bornées et soit $(u_n) \in l_\infty$ la suite définie par :

$$u_n = \begin{cases} 0 & : \quad n \neq \omega \\ 1 & : \quad n = \omega \end{cases}$$

où ω est un entier illimité fixé.
On a clairement $d_\infty(u_n, 0) = sup_{n>0} |u_n - 0| = 1$. Donc (u_n) est limité. Cependant (u_n) n'est pas presque standard car si (v_n) était une suite standard équivalente, on aurait nécessairement, pour tout n standard, $v_n \simeq 0$ et donc $v_n = 0$ d'où, par transfert, $v_n = 0$ pour tout n. Ceci est absurde car dans ce cas $d_\infty((u_n), (v_n)) = 1$ n'est pas infinitésimale.

Théorème 3.9. (Critère de compacité pour les parties d'un espace métrique)
Soit A un sous-ensemble standard d'un espace métrique standard E; A est compact si et seulement si tout point de A est presque standard dans A.

Preuve. Pour la preuve on a besoin au lemme suivant

Lemme. (Caractérisation topologique de la relation " $\simeq$ ")

Soit y un élément standard d'un espace métrique standard E; pour tout $x \in E$, x est équivalent à y si et seulement si tout voisinage standard de y contient x.

Preuve. Soient $\mathcal{Y}$ l'ensemble des voisinages de y et $B(y, r)$ la boule ouverte de centre y et de rayon r.

($\Longrightarrow$) On a :

$$\forall U \in \mathcal{Y}\ \exists r > 0\ B(y, r) \subset U$$

Donc, par transfert,

$$\forall^{st} U \in \mathcal{Y}\ \exists^{st} r > 0\ B(y, r) \subset U$$

si $d(x, y) \simeq 0$, $x \in B(y, r)$ pour tout standard $r > 0$; donc $x \in U$.

($\Longleftarrow$) Par hypothèse, $x \in B(y, r)$ pour tout standard $r > 0$. Donc

$$\forall^{st} r > 0\ d(x, y) < 0$$

d'où $d(x, y) \simeq 0$.

Revenons à la preuve du théorème en question

($\Longrightarrow$) Supposons qu'il existe un élément x de A qui n'est pas presque standard. Comme aucun élément standard y de A n'est équivalent à x, en vertu du lemme, on peut associer à chaque standard y de A un voisinage ouvert U_y, de y ne contenant pas x. Soit $\mathcal{R}$ le standardisé de l'ensemble de ces U_y. Par transfert, $\mathcal{R} \subset \tau$, où τ désigne la topologie de E et $\mathcal{R}$ est un recouvrement de A. Supposons qu'on puisse en extraire un recouvrement fini $\mathcal{R}'$. On peut supposer $\mathcal{R}'$ standard, par transfert. Donc $\mathcal{R}'$ ne contient que des éléments standard de $\mathcal{R}$, c'est-à-dire des U_y. Or x n'appartient à aucun U_y, ce qui est absurde. Donc A n'est pas compact.

($\Longleftarrow$) Supposons à présent que tout élément x de A est presque standard. Soit $\mathcal{R} \subset \tau$ un recouvrement ouvert (infini) de A. Montrons qu'on peut en extraire un recouvrement fini. Par transfert on peut supposer ce recouvrement standard. Donc puisque

$$\forall x \in A\ \exists U \in \tau\ U \in \mathcal{R} \text{ et } x \in U$$

on en déduit, par transfert, que

$$\forall^{st} x \in A \; \exists^{st} U \in \tau \; U \in \mathcal{R} \text{ et } x \in U.$$

Soit $F = \{U_1, U_2, ..., U_\omega.\}$ une partie finie contenant tous les éléments standard de $\mathcal{R}$. On va montrer que $F \cap \mathcal{R}$ est un sous recouvrement fini de A. Par hypothèse ${}^0x \in A$. Comme $\mathcal{R}$ est un recouvrement de A, il existe $U \in \mathcal{R}$ tel que ${}^0x \in U$. Par transfert (${}^0x$ et $\mathcal{R}$ étant standard) on peut supposer que U est standard et donc $U \in F$. Mais comme U est un ouvert standard, on a également $x \in U$. Donc F est un recouvrement fini de A.

Dans le but de donner une caractérisation pour les espaces métriques propres, nous commençons d'abord par la définition suivante.

Définition 3.2. Un espace métrique est propre si toutes ses boules fermées sont compactes (et donc, dans le cas des espaces normés, s'il est de dimension finie).

Théorème 3.10. (Caractérisation des espaces propres)

Soit E un espace métrique standard ; E est propre si et seulement si tout élément limité de E est presque standard.

Preuve. $(\Longrightarrow)$ Soit x un élément limité de E. Alors il existe un élément standard $y \in E$ tel que $d(x, y)$ soit limité. Soit $s > d(x, y)$ un réel standard. Donc $x \in B'(y, s)$, où

$$B'(y, s) = \{t \in E \mid d(y, t) \leq s\}$$

est la boule fermée de centre y et de rayon $s > 0$. Par hypothèse $B'(y, s)$ est compact. Comme $B'(y, s)$ est compact standard alors, par le théorème 3.7 et le fait que $x \in B'(y, s)$, x est presque standard.

$(\Longleftarrow)$ Soit $B'(x, r)$ une boule fermée standard de E avec $r > 0$. Donc x et r sont standard. Soit $y \in B'(x, r)$ donc y est limité car $d(x, y) \leq r$. Alors par hypothèse y est presque standard i.e. $\exists^{st} \alpha \in E$ tel que $d(y, \alpha) \simeq 0$.

Nous montrons que $\alpha \in B'(x, r)$; en effet supposons que $\alpha \notin B'(x, r)$. Donc

$$d(x, \alpha) \leq d(x, y) + d(y, \alpha)$$

cela signifie que

$$d(x,\alpha) = r+\gamma \leq d(x,y) + d(y,\alpha)$$

où γ est un réel standard strictement positif. Cela signifie aussi que $r < r+\gamma - d(y,\alpha) \leq d(x,y)$. Ceci est contredit le fait que $d(x,y) \leq r$. Alors par le théorème 3.7, $B^{'}(x,r)$ est compact. D'où, par le transfert, toute boule fermée de E est compact. Par conséquent E est propre.

Exercices

Dans les exercices suivants $\epsilon > 0$ est un réel infinitésimal.

Exo 1. Etudier la continuité des fonctions suivantes

$f(x) = 5x^2 + x + 1$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ et $f(x) = \dfrac{\epsilon x}{x^2+1}$

Exo 2. Etudier la continuité uniforme des fonctions suivantes

$f(x) = x^2$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \epsilon x^2$

Exo 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que

f est continue si et seulement si : $f \in {}^{s}\{f \mid \forall^{st}x \forall y x \simeq y \implies f(x) \simeq f(y)\}$.

Exo 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction standard. Montrer que

$$f \text{ est uniformément continue sur } \mathbb{R}$$
$$\Updownarrow$$
$$f \in {}^{s}\{f \mid \forall x \in \mathbb{R} \ (f \text{ est s-continue en } x)\}.$$

Exo 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction S-continue en un point limité x. Montrer que $f({}^{0}x) = {}^{0}(f(x))$.

Exo 6. Soit ω un entier positif illimité. Etudier la continuité et la S-continuité des fonctions suivantes

a) $f(x) = x^{\omega}$.

b) $f(x) = \sin(\omega x)$.

Exo 7. Montrer que tout réel standard est limite d'une suite standard de rationnels. Le nombre e est-il équivalent à un rationnel standard ? à un rationnel non standard ?

Exo 8. Montrer, à l'aide du critère non standard de convergence d'une suite, que si u_n tend vers l et v_n tend vers $l^{'}$ alors $u_n + v_n$ tend vers $l + l^{'}$ et $u_n v_n$ tend vers $ll^{'}$.

Exo 9. Montrer qu'une suite standard est borée si et seulement si tous ses termes de rang illimité sont limités. Est-ce encore vrai pour une suite non standard ?

Exo 10. a) Donner un critère non standard pour qu'une série standard soit convergente. Donner un critère non standard pour qu'une suite standard soit de Cauchy.

Exo 11. On dit qu'une suite (u_n) est S-Cauchy si $\forall p \simeq +\infty$, $\forall p \simeq +\infty$: $u_p \simeq u_q$. Montrer qu'une telle suite n'est pa nécessairement de Cauchy. On dit qu'une suite (u_n) est S-convergente vers l si $\exists l\ \forall n \simeq +\infty\ u_n \simeq l$. Vérifier que l'on a :

$$(u_n) \text{ S-Cauchy} \iff (u_n) \text{ S-converge.}$$

mais que ce serait faux si l'on avait choisi $[\exists^{st} l\ \forall n \simeq +\infty\ u_n \simeq l]$ pour définition de la S-convergence.

Suite de la série d'exercice de la première partie

2$^{\text{ième}}$partie

Exo 11. Trouver les standardisés des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ ($\varepsilon \simeq 0$ positif et $\omega \cong +\infty$ un entier).

$B_1 =]-1+\varepsilon, 1]$.

$B_2 = {}^s\{x \mid x \in \mathbb{Q} \cap F\ \&\ 0 \leq x < 1\}$, où F est un ensemble fini contenant tous les standard de $\mathbb{R}$.

$B_3 = {}^s\{(x, x^{2\omega+1}) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$B_4 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \forall x\ \forall \partial \cong 0\ f(x+\partial) \cong f(x)\}$.

Exo 12. Soient x et y deux réels limités. Montrer que

$$^0(xy) = {}^0x.{}^0y,\ {}^0\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{{}^0x}{{}^0y} \text{ si } {}^0y \neq 0.$$

Exo 13. Soit $\xi \neq 0$ un réel non standard appréciable. Soit F une partie finie de $\mathbb{Q}$ contenant tout les éléments standard de $\mathbb{Q}$.

a- Montrer que $\forall n \geq 1$, $n\xi$ n'est pas standard.

b- Déduire que $\mathbb{R} \setminus \{n\xi \mid n \geq 1\}$ n'est pas standard.

c)- Trouver le standardisé de $\mathbb{R}\setminus\{n\xi \mid n \geq 1\}$.

3$^{\text{ième}}$partie

Exo 14. Montrer que deux ensembles standard sont d'intersection vide si et seulement s'ils n'ont aucun élément standard en commun.
Exo 15. Est-il vrai qu'une fonction standard $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si elle est bornée aux points standard? Est-il vrai qu'une fonction qui ne prend que des valeurs standard aux points standard est une fonction standard ?
Exo 16. Montrer que, pour une fonction standard, l'image réciproque d'un point standard est standard. Cette image réciproque peut-elle contenir des points non standard ?

Exo 17. Montrer que si A est un sous-ensemble standard de $\mathbb{R}^2$ alors ses deux projections sur l'axe des x et l'axe des y sont des sous-ensembles standard de $\mathbb{R}$. La réciproque est-elle vraie ?
Exo 18. Parmi les "transferts" suivants, quelques-uns sont illégaux : lesquels et pourquoi ? ($\epsilon \simeq 0$, $\epsilon > 0$ et $\omega \simeq +\infty$ sont donnés).
a) L'ensemble des réels standard est un ensemble borné (par $\omega \simeq +\infty$) . Donc il est borné par un standard.
b) Il existe un réel dans $]-\epsilon, 0[$ alors Il existe un réel standard dans cet intervalle(ie dans $]-\epsilon, 0[$).
c) Il existe une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui passe par le point $(1, \omega)$ alors Il existe une fonction standard $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui passe par ce point.
d) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction standard. Si $f \simeq 0$ sur un voisinage de $x = 0$ alors il existe un voisinage standard de $x = 0$ sur lequel $f \simeq 0$.