Table des matières

Introduction

Chapitre 1

Chapitre 1: Méthodes de raisonnement mathématique

1.1 Introduction sur la logique

Définition 1.1.1 *(**Assertion (Proposition)**) On rappelle qu'une Assertion (proposition) est un enoncé pouvant être "vrai" ou "faux", qui sont les valeurs de vérité, noté parfois "V", "F" ou "1", "0", respectivement*

. Les connecteurs logiques

1 La négation: Soit P une ssertion, la négation de P, noté "$NonP$", ou $\overline{P}$, est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

p	1	0
$\overline{p}$	0	1

tableau de vérité

2 La conjonction ("et"): Soient p et q deux assertions, la conjonction "p *et* q", noté aussi "$p \wedge q$", est vraie signifie que les deux assertions sont vraies en meme temps.

p	1	0	0	1
q	0	1	0	1
$p \wedge q$	0	0	0	1

tableau de vérité

3 La disjonction ("Ou"): Soient p et q deux assertions, la disjonction "p *ou* q", noté aussi "$p \vee q$", est vraie signifie que l'une au moins des deux assertions et vraie.

p	1	0	0	1
q	0	1	0	1
$p \vee q$	1	1	0	1

tableau de vérité

Properiétés

. $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$

. $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$

4 L'implication: Soient p et q deux assertions, l'implication "p implique q", noté "$p \Longrightarrow q$",signifie que si l'assertion p est vraie alors l'assertion q est vraie, c'*est* à dire, si p alors q. Ce qui équivaut à l'assertion "$\overline{p} \vee q$".

Par exemple pour $x \in \mathbb{R}$, si $x > 2$ alors $x^2 > 4$. ce équivaut à $x > 2 \Longrightarrow x^2 > 4$

Exercice 1.1.1 *Ecrire le tableau de vérité de l'assertion "$p \Longrightarrow q$"*

a- La négation d'une implication: ($\overline{p \Longrightarrow q}$) équivaut à $p \wedge \overline{q}$

b- L'implication "$p \Longrightarrow q$" n'a pas le même sens que l'implication "$q \Longrightarrow p$" qui s'appelle l'implication réciproque de $p \Longrightarrow q$.

Exemple 1.1.1 *Soit x réel, l'implication $x = 1 \Longrightarrow x^2 = 1$ est vraie, mais l'implication réciproque $x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1$ est fausse.*

5 **L'équivalence logique**: Soient p et q deux assertions, si $p \Longrightarrow q$ et $q \Longrightarrow p$ alors $q \Longleftrightarrow p$, et on dit que p et q sont équivalente, ou "p si et seulement si q", ou bien "pour p il faut et il suffit que q"

Les quantificateurs

Soit E un ensemble non vide

1. **Le quantificateur universel** $(\forall)$: Noté $(\forall)$. On considère l'assertion "$\forall x \in Ep(x)$", cette phrase formelle affirme que la properiété p est vraie pour tous le éléments de E, et on dit "Quelque soit x appartient à E", "Pour tout x de E", "pour chaque x de E"...

Exemple 1.1.2 $\forall x \in \mathbb{R}\ x^2 \geq 0$ *vraie*

Exemple 1.1.3 $\forall x \in \mathbb{R}\ x^2 \geq x$ *fausse, (un contre-exemple: pour* $x = 0.5\ x^2 = 0.25$ *on a* $x > x^2$)

Remarque 1.1.1 *Dans la proposition "*$\forall x \in E\ p(x)$*" x est muette i.e, "*$\forall x \in E\ p(x)$*" signifie exactement la même chose que "*$\forall y \in E\ p(y)$*"*

2 **Le quantificateur existentiel** $(\exists)$: Noté $(\exists)$, se lit "il existe au moins". L'assertion "$\exists x \in E\ p(x)$" est vraie lorsque l'on peut trouver au moins un élément x de E pour lequel $p(x)$ est vraie, on lit "il existe x appartient à E tel que $p(x)$"

Exemple 1.1.4 $\exists x \in \mathbb{R}\ x(x-1) < 0$ *vraie (par exemple* $x = 0.8$)

$$\exists x \in \mathbb{R}\ (x-1)^2 = -1 \text{ fausse}$$

Remarque 1.1.2 *1/. Pour préciser qu'une assertion $p(x)$ est vraie en une unique valeur dans E, on rajoute point d'exlamation* (!)

Par exemple: $(\exists! x \in \mathbb{R}\ f(x) = 0)$ signifie que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$

2/. L'ordre des quantificateurs est très important

Par exemple: $(\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}\ x.y > 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}\ x.y > 0)$ sont différentes, où la première est vraie, mais la deuxième est fausse

Négation des quantificateurs

- La négation de "$\forall x \in E\ p(x)$" est "$\exists x \in E\ \overline{p(x)}$" où $\overline{p(x)}$ est la négation de $p(x)$.

Exercice 1.1.2 *Ecrire par les quantificateurs les assertions suivante*

1. "Un entier positif est plus grand qu'un entier négatif"
2. "L'addition des réelles est commutatif

1.2 Méthodes de raisonnement mathématiques

1.2.1 Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion "$p \Longrightarrow q$" est vraie. On suppose que p est vraie et on montre qu'alors q est vraie. C'est la méthode à laquelle vous êtes le plus habitué.

Exemple 1.2.1 *Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$.*

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$. Alors $a = \dfrac{p}{q}$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$ et un certain $q \in \mathbb{N}^*$. De même $b = \dfrac{p'}{q'}$ pour un certain $p' \in \mathbb{Z}$ et un certain $q' \in \mathbb{N}^*$. Maintenant

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'}$$

Or le numérateur $pq' + p'q \in \mathbb{Z}$, et lé dénominateur qq' est lui un élément de $\mathbb{N}^*$.

Donc $a + b$ s'écrit bien de la forme $a + b = \dfrac{p"}{q"}$ avec $p" \in \mathbb{Z}$ et $q" \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $a + b \in \mathbb{Q}$ ■

1.2.2 Raisonnement par contraposée

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante

$$L\prime assertion\ "p \Longrightarrow q" est\ équivalente\ à\ "\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}"$$

Donc si on souhaite montrer l'assertion "$p \Longrightarrow q$", on montre en fait que si $\overline{q}$ est vraie alors $\overline{p}$ est vraie

Exemple 1.2.2 *Soit $n \in \mathbb{N}$. montrer que si n^2 est pair alors n est pair.*

Démonstration. En utilisant le symbol de l'implication cette assertion s'écrit (n^2 est pair $\Longrightarrow$ n est pair).

On suppose que n n'est pas pair, et on montre alors que n^2 n'est pas pair (n n'est pas pair $\Longrightarrow$ n^2 n'est pas pair)

Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2l + 1$, avec $l = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$.

Et donc n^2 est impair c'est à dire n'est pas pair.

On a montré que si n n'est pas pair alors n^2 n'est pas pair. Par contraposition ceci est équivaut à:

Si n^2 est pair alors n est pair. ■

1.2.3 Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer "$p \Longrightarrow q$" repose sur le principe suivant: on suppose à la fois que p est vraie et que q est fausse et on cherche une **contradiction**. Ainsi si p est vraie alors q doit être vraie et donc "$p \Longrightarrow q$"est vraie.

Exemple 1.2.3 *Soient a, $b \geq 0$. Montrer que si $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ alors $a = b$*

Démonstration. Par l'absurde, on suppose que $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ et $a \neq b$. On a

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Longrightarrow \quad a(1+a) = b(1+b) \qquad & \Longrightarrow a^2 + a = b^2 + b \\ & \Longrightarrow a^2 - b^2 = b - a \\ (a-b)(a+b) &= -(a-b) \end{aligned}$$

Comme $a \neq b$ alors $a - b \neq 0$ et donc en divisant par $a - b$ on obtient $a + b = -1$. La somme de deux nombres positifs ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction. Donc si $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ alors $a = b$. ■

1.2.4 Raisonnement par le contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type "$\forall x \in E \; p(x)$" est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $p(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $p(x)$ soit fausse. (Rappelez-vous que la négation de "$\forall x \in E \ p(x)$" est "$\exists x \in E \ \overline{p(x)}$". Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à l'assertion "$\forall x \in E \ p(x)$".

Exemple 1.2.4 *On considère l'assertion "$\forall x \in \mathbb{R} \ x^2 \geq x$", cette assertion est vraie ou fausse? justifier.*

Cette assertion est fausse

Démonstration. Un contre-exemple est 0.5. Si $x = 0.5$ alors $x^2 = 0.25$ et on a dans ce cas $x \geq x^2$. ■

1.2.5 Raisonnement par récurrence

Le principe de recurrence permet de montrer qu'une assertion $p(n)$, depend de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstrartion par reccurence se déroule en trois étapes: lors de **l'initialisation** on prouve $p(0)$. Pour l'étape **d'hérédité**, on suppose que $p(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, et on montre alors que $p(n+1)$ au rang suivant est vraie. En fin dans la **conclusion**, on rappelle que par le principe de recurrence $p(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.2.5 *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.*

Démonstration. Pour $n \geq 0$, notons $p(n)$ l'assertion $2^n > n$.

Nous allons démontrer par récurrence que $p(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$

Initialisation: Pour $n = 0$ on a $2^0 = 1 > 0$. Donc $p(0)$ est vraie.

Héridité: Fixons $n \geq 0$. On suppose que $p(n)$ est vraie $(2^n > n)$ et on montre que $p(n+1)$ est vraie $(2^{n+1} > n+1)$

$$\begin{aligned} 2^{n+1} = 2.2^n = \ & 2^n + 2^n \\ & > n + 2^n \text{ après } p(n) \text{ est vraie } (2^n > n) \\ & n + 1 \text{ car } 2^n \geq 1 \end{aligned}$$

Donc $p(n+1)$ est vraie.

Conclusion: Par le principe de récurrence $p(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, c'est à dire $2^n > n$ pour tout $n \geq 0$. ■

Remarque 1.2.1 *Si on doit démontrer qu'une properiété est vraie pour tout $n \geq n_0$, alors on commence l'initialisation au rang n_0.*

1.3 Exercices

Exercice 01

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose: $\Leftrightarrow, \Leftarrow, \Rightarrow$

1. $x \in \mathbb{R}$ $x^2 = 4$ ......$x = 2$;
2. $z \in \mathbb{C}$ $z = \overline{z}$ ....$z \in \mathbb{R}$;
3. $x \in \mathbb{R}$ $x = \pi$........$e^{2ix} = 1$.

Exercice 02

Soient les quatre assertions suivantes:

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R}\ \ x + y > 0; \qquad (b)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ x + y > 0;$$
$$(c)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R}\ \ x + y > 0; \qquad (d)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \ y^2 > x.$$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vrais ou fausses?
2. Donner leur négation.

Exercice 03

Soient a, $b \in \mathbb{R}_+$, Montrer que si $a \leq b$,alors $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$, et $a \leq \sqrt{ab} \leq b$.

Exercice 04

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $n\,(n+1)$ est divisible par 2

Ind: (distinguer les n pairs des n impairs)

Exercice 05

Soient k,et $k^/$ deux entiers naturels non nuls, Montrer que $kk^/ = 1 \Rightarrow k = k^/ = 1$

Exercice 06

En utilisant le raisonnement par l'absurde, montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel

Exercice 07

1. Est ce que pour tout x réel on a $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$?

2. L'assertion, $\forall x \in \mathbb{R}\ x^2 \geq x$ est elle vraie au fausse? Justifier.

Exercice 08

1. Montrer l'assertion suivante:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2 Fixons un réel $x \geq 0$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1, (1+x)^n \geq 1 + nx$.

Conclusion générale