Table des matières

Introduction

Chapitre 1

Chapitre 02: Les ensembles, Les relations et les applications

1.1 Théorie des ensembles

Définition 1.1.1 *Un ensemble E est par définition une collection d'objets dits éléments de E*

Par exemple $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ sont des ensembles (ils ont d'alleurs tous les deux la particularité que l'on peut en numéroter les élément), c'est aussi le cas de $\mathbb{Q}$. Les nombres réels forment aussi un ensemble (noté $\mathbb{R}$), mais dont on ne peut cette fois numéroter les éléments.

- Un enseble particulier est l'ensemble vide, noté ϕ qu'est l'ensemble ne contenant aucun éléments.

On note $(x \in E)$ si x est un élément de E et $x \notin E$ dans le cas contraire.

- Voici une autre façon de définir des ensembles: Une collection d'éléments qui vérifient une properiété

Exemple 1.1.1 $A = \{x \in \mathbb{R},\ \ |x - 2| < 1\}$, $B = \{z \in \mathbb{C},\ \ z^5 = 1\}$.

L'inclusion($\subset$) Soient E, F deux ensembles, si tout élément de E est un élément de F (autrement dire: $\forall x \in E\ x \in F$) on dit alors que E est un sous ensemble de F, ou est une partie de F, et note $E \subset F$.

L'égalité On dit que $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$

L'ensemble des parties de E: On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Par exemple si $E = \{1, 2, *\}$ $\mathcal{P}(E) = \{\{1\}, \{2\}, \{*\}, \{1, 2\}, \{1, *\}, \{2, *\}, \{1, 2, *\}\}$

Le complémentaire Soient E, A deux ensembles, si $A \subset E$, alors le complémentaire de A dans E est l'ensemble

$$A_E^c = \{x \in A,\ x \notin A\}$$

On le note aussi $E \setminus A$ et juste C_A s'il n'y a pas d'ambiguité (et parfois aussi A^c ou $\overline{A}$)

Exemple 1.1.2 *Si* $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *et* $A = \{2, 3, 5\}$

On a $A \subset E$ et $A^c = \{0, 1, 4, 6\}$

Il est claire que $A \cap A^c = \phi$, et $A \cup A_E^c = E$.

Union, Intersection, Différence symétrique

Soit E un ensemble, pour A, B deux parties de E

L'union de A et B est l'ensemble $A \cup B = \{x \in E,\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$

L'intersection de de A et B est l'ensemble $A \cap B = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \in B\}$

La différence symétrique est l'ensemble $A \triangle B = (A \diagdown B) \cup (B \setminus A) = A \cup B \diagdown A \cap B$

Properiétés Soient A, B, C des parties d'un ensemble E

1. $A \cap B = B \cap A$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, (On peut écrire $A \cap B \cap C$ sans ambiguité)
3. $A \cap \phi = \phi$, $A \cap A = A$,
4. $A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A$
5. $A \cup \phi = A$, $A \cup A = A$
6. $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$
7. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (On peut écrire $A \cup B \cup C$)

8. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

9. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

10. $(A_E^c)_E^c = A$ et donc $A \subset B \Longleftrightarrow B^c \subset A^c$

11. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

12. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Exercice 1.1.1 *Montrer les properiétés (11) et (12)*

Produit cartésien Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien, noté $E \times F$, est l'ensemble définit par

$E \times F = \{(x, y) \;\; x \in E \text{ et } y \in F\}$

1.2 Relations binaires

1.2.1 Relation d'ordre

Définition 1.2.1 *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définit sur un ensemble non vide E. $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre lorsque:*

i) $\mathcal{R}$ est **réfelxive,** c'est à dire: $\forall x \in E$, $x\mathcal{R}x$.

ii) $\mathcal{R}$ est **antisymétrique,** c'est à dire: $\forall x, y \in E$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Longrightarrow x = y$

iii) $\mathcal{R}$ est **transitive,** c'est à dire: $\forall x, y, z \in E$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$.)

Exemple 1.2.1 $\leq$, $\geq$, $=$ *sont des relation d'ordre sur* $\mathbb{R}$ *(et sur* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$)

$>$, $<$ n'en sont pas (manque de réflexivité)

$-$L'inclusion ($\subset$) est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de l'ensemble Ω.

Ordre total. Ordre partiel

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E, on dit que $\mathcal{R}$ définiti un ordre total sur E lorsque deux éléments de E sont toujours comparables pour $\mathcal{R}$, c'est à dire: $\forall x, y \in E$ $(x\mathcal{R}y \text{ } ou \text{ } y\mathcal{R}x)$. Dans le cas contraire, on parle d'ordre partiel.

Exemple 1.2.2 $\leq$ *définit un ordre total sur* $\mathbb{R}$ *(et sur* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$)

$\subset$ définit un ordre partiel sur $\mathcal{P}(\otimes$, l'ensemble des parties de l'ensemble Ω.

Vocabulaire dans un ensemble ordonné

Soit $\leq$ désigne une relation d'ordre quelconque sur un ensemble E.

1. **Maximum. Minimum**

Définition 1.2.2 *Soit* A *une partie de* E *s'il existe un élément* a *de* A *tel que* $\forall x \in A$ $x \leq a$, *alors il n'en existe qu'un seul, et on l'appelle le* ***maximum de*** **A** *(ou le plus grand élément de* A), *noté* $\max A$.

La définition est analogue pour le minimum (ou le plus petit élément de A), noté $\min A$

Exemple 1.2.3 *Pour la relation* $\leq$ *dans* $\mathbb{R}$, $A = \{2, -4, 0, 2, 5, 1\}$, $\max A = 5$, $\min A = -4$

- Il n' y a pas nécessairement existence!

Exemple 1.2.4 *Pour la relation* $\leq$ *dans* $\mathbb{R}$, $]0, 1[$ *et* $\mathbb{N}$ *n'ont pas de maximum*

2 **Majorants. Minorants**

Définition 1.2.3 *Soit* A *une partie de* E, *et soit* $z \in E$, *on dit que* z *est un* ***majorant*** *de* A *(dans* E) *lorsque* $\forall x \in A$ $x \leq z$,

La définition est analogue pour le **minorant**.

Exemple 1.2.5 *Pour la relation* $\leq$ *dans* $\mathbb{Z}$, *si* $A = \{2, -4, 0, 2, 5, 1\}$, *l'ensemble des majorants est* $\{5, 6, 7, ...\}$, *et l'ensemble des minirants est* $\{-4, -5, -6, ...\}$

Attention: Il n'y a pas toujours existence, ni unicité!

D'ailleurs, si z majore A, alors tout élément z' de E tel que $z \leq z'$ majore aussi A.

Remarque 1.2.1 *On a l'équivalence:* $\max A = a \Longleftrightarrow a \in A$ *et* a *majore* A

Définition 1.2.4 ***(ensemble borné)*** *Une partie* A *est dite majorée (respectivement, minorée) lorsqu'elle admet au moins un majorant (respectivement, minorant). En fin* A *est dite* ***bornée*** *lorsqu'elle est à la fois majoréée et minorée.*

3 Borne supérieure. Borne inférieure

Définition 1.2.5 *Soit A une partie de E. Si A est majorée et si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, celui-ci est appelé la* ***borne supérieure de*** *A, notée* $\sup A$.

- Si A est minorée et si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, celui-ci est appelé la **borne inférieure de** A, notée $\inf A$.

Attention: Il n'y a pas toujours existence

Remarque 1.2.2 *Si A admet un maximum, alors A admet une borne supérieure et* $\sup A = \max A$.

Preuve. Supposons que A admet un maximum, disons a.On note par S l'ensemble des majorants de A (S n'est pas vide puisqu'il contient a). Soit $b \in S$, alors $a \leq b$ puisque $a \in A$ et b est un majorant de A. Ainsi, $\forall b \in S$, $a \leq b$, donc a est le minimum de S. Donc a est la borne supérieure de A ■

Exercice 1.2.1 *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et soit A une partie de l'ensemble E. Dans les cas suivants, déterminer, s'il existe,* $\max A$, $\min A$, $\sup A$, $\inf A$,

1. $E = \mathbb{R}$, $A = \{0, 1, -5, 3, 5, -2\}$
2. $E = \mathbb{R}$, $A = [-4, 2[$
3. $E = \mathbb{N}$, $A = \{0, 1, 5, 3, 6\}$
4. $E = \mathbb{R}$, $A =]-1, 1[$
5. $E = [-1, 1]$, $A = \left\{\cos \frac{7n\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$
6. $E = \mathbb{R}$, $A = \{x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}\}$

1.2.2 Relation d'équivalence

Définition 1.2.6 *Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E, c'est une relation d'équivalence si:*

- $\forall x \in E$, $x\mathcal{R}x$, $(réflexivité)$
- $\forall x, y \in E$, $x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$, $(symétrique)$
- $\forall x, y, z \in E$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z$, $(transitivité)$

Exemple 1.2.6 *La relation $\mathcal{R}$ "d'être parallèle" est une relation d'équivalence pour l'ensemble E des droites affines du plan*

la relation "etre de meme age" sur un ensemble des personnes est une relation d'équivalence.

La classe d'équivalence

Définition 1.2.7 *Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. La classe d'équivalence d'un élément $x \in E$ est le sous ensemble de E définit par*

$$cl(x) = \{y \in E,\ y\mathcal{R}x\}$$

On le note aussi $\overset{o}{x}$ ou bien $\overline{x}$.

Si $y \in cl(x)$, on dit que y un représentant de $cl(x)$.

Définition 1.2.8 (partition) *Une partition d'un ensemble E est un ensemble $\{E_i\}$ de parties de E tel que $E = \underset{i}{\cup} E_i$ et $E_i \underset{i \neq j}{\cap} E_j = \phi$*

Proposition 1.2.1 *Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. On a les properiétés suivantes:*

1. $cl(x) = cl(y) \Longleftrightarrow x\mathcal{R}y$.
2. Pour tout $x, y \in E$, $cl(x) = cl(y)$ ou $cl(x) \cap cl(y) = \phi$.

3. Soit D l'ensemble de représentants de toutes les classes alors les parties $\{cl(x),\ x \in D\}$ constitue une partition de E.

L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Soit $n \geq 2$ un entier. Définissons la relation suivante sur l'ensemble $E = \mathbb{Z}$:

$$a \equiv b (\operatorname{mod} n) \Longleftrightarrow a - b \textit{ est un multiple de } n$$

Par exemple pour $n = 6$: $26 \equiv 2(\operatorname{mod} 6)$, $34 \equiv 4(\operatorname{mod} 6)$, $-3 \equiv 21(\operatorname{mod} n)$

Cette relation est une relation d'équivalence. En effet:

- Soit $a \in \mathbb{Z}, a - a = 0 = 0.n$ est un multiple de n donc $a \equiv a(\operatorname{mod} n)$. La relation est réflexive

- Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, supposons que $a \equiv b(\operatorname{mod} n)$, alors $a - b$ est un multiple de n, autrement dit il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a - b = kn$, et donc $b - a = (-k)n$ et ainsi $b \equiv a(\operatorname{mod} n)$. La relation est symétrique.

- Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$, supposons que $\begin{cases} a \equiv b(\operatorname{mod} n) \\ \text{et} \\ b \equiv c(\operatorname{mod} n) \end{cases}$ alors il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} a - b = kn \\ \text{et} \\ b - c = k'n \end{cases}$. Alors $a - c = (k + k')\, n$ et donc $a \equiv c(\operatorname{mod} n)$. La relation est transitive

les classes d'équivalence

La classe d'équivalence de $a \in \mathbb{Z}$, notée $cl(a)$ ou $\overset{o}{a}$ est:

$$\begin{aligned} \overset{o}{a} &= \{b \in \mathbb{Z},\ b \equiv a(\operatorname{mod} n)\} \\ &= \{b \in \mathbb{Z},\ b - a = nk \text{ pour certain } k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Alors c'est aussi exactement $\overset{o}{a} = a + n\mathbb{Z} = \{a + nk \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Comme $n \equiv 0(\operatorname{mod} n)$, $n + 1 \equiv 1(\operatorname{mod} n)$, $n + 2 \equiv 2(\operatorname{mod} n)$, ... alors

$$\overset{o}{n} = \overset{o}{0},\ n \overset{o}{+} 1 = \overset{o}{1},\ n \overset{o}{+} 2 = \overset{o}{2}, ...$$

Donc l'ensemble des classes d'équivalence est l'ensemble

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{ \overset{o}{0}, \overset{o}{1}, \overset{o}{2}, ...n \overset{o}{-} 1 \right\}$$

qui contient exacteent n éléments.
Par exemple: pour $n = 5$. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \left\{ \overset{o}{0}, \overset{o}{1}, \overset{o}{2}, \overset{o}{3}, \overset{o}{4} \right\}$ tel que

. $\overset{o}{0} = 0 + 5\mathbb{Z} = 5\mathbb{Z} = \{..., -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, ...\}$

. $\overset{o}{1} = 1 + 5\mathbb{Z} = \{..., -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, ...\}$

. $\overset{o}{2} = 2 + 5\mathbb{Z} = \{..., -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, ...\}$

. $\overset{o}{3} = 3 + 5\mathbb{Z} = \{..., -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, ...\}$

. $\overset{o}{4} = 4 + 5\mathbb{Z} = \{..., -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, ...\}$

on a trouvé une partition de $\mathbb{Z}$ en 5 parties

Exercice 1.2.2 *On définit sur l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ une addition par $\overset{o}{a} + \overset{o}{b} = (a \overset{o}{+} b)$. Calculer la table d'addition dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. (c'est à dire toute les sommes $\overset{o}{a} + \overset{o}{b}$ pour $\overset{o}{a}, \overset{o}{b} \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Même chose avec la multiplication $\overset{o}{a} \times \overset{o}{b} = (a \overset{o}{\times} b)$.*

1.3 Les applications

1.3.1 Généralités

Définition 1.3.1 *Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est la donnée pour chaque élément $x \in E$ d'un unique élément de F noté $f(x)$, (on écrit $f : E \longrightarrow F$).*

E est appelé l'ensemble de départ, F l'ensemble d'arrivée

Exemple 1.3.1 *Comme cas particulier L'identité: $Id_E : E \longrightarrow E$ est définie par $Id_E(x) = x$ pour tout $x \in E$.*

Egalité:

Deux applications $f,\ g : E \longrightarrow F$ sont égales si et seulement si pour tout $x \in E$ $f(x) = g(x)$. On note alors $f = g$.

Le graphe:

Le graphe d'une application $f : E \longrightarrow F$ est le sous ensemble de $E \times F$ défini par

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in E \times F \ /x \in E\}\,.$$

Composition:

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ est l'application défini par $g \circ f(x) = g(f(x))$

$$E \overset{\curvearrowright f}{\longrightarrow} \underset{\hookrightarrow g\circ f}{F} \overset{\curvearrowright g}{\longrightarrow} G$$

Exemple 1.3.2 *On considère les applications* $\begin{array}{rl} f :]-\infty, 0[& \longrightarrow]0, \infty[\\ x \longrightarrow & \frac{-1}{x} \end{array}$ *et* $\begin{array}{rl} g :]0, \infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow & \sqrt{x} \end{array}$

alors $g \circ f :]-\infty, 0[\ \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie pour tout $x \in]-\infty, 0[$ par

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{-1}{x}}$$

1.3.2 Image directe, image réciproque

Soient E et F deux ensembles non vides et soit U une application de E dans F ($U : E \longrightarrow F$)

Définition 1.3.2 *Soit A une partie de E,* ***l'image directe*** *de A par U est la partie de F noté $U(A)$ définie par*

$$U(A) = \{U(x) \in F,\ x \in A\}$$

Définition 1.3.3 *Soit B une partie de F,* ***l'image réciproque*** *de B par U est la partie de E, noté $U^{-1}(B)$, définie par*

$$U^{-1}(B) = \{x \in E,\ U(x) \in B\}$$

Soient $E = [0, 1]$ et $F = [-1, 0]$ deux intervalles de $\mathbb{R}$.

On considère une application $U\colon E \to F$, définie par $U(x) = x^2 - 1$

1. Déterminer $U\left(\left]0, \frac{1}{2}\right[\right)$, et $U^{-1}\left(\left]-\frac{1}{2}, 0\right[\right)$

$$U\left(\left]0, \frac{1}{2}\right[\right) = \left\{U(x) \in F,\ x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\right\}$$
$$x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\Longrightarrow\ 0 < x < \frac{1}{2} \Longrightarrow \qquad 0 < x^2 < \frac{1}{4}$$
$$\Longrightarrow -1 < x^2 - 1 < -\frac{3}{4}$$

Alors $U\left(\left]0, \frac{1}{2}\right[\right) = \left]-1, -\frac{3}{4}\right[$

. $U^{-1}\left(\left]-\frac{1}{2}, 0\right[\right) = \left\{x \in E,\ U(x) \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[\right\}$

$$U(x) \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[\Longrightarrow\ -\frac{1}{2} < x^2 - 1 < 0 \Longrightarrow\ \frac{1}{2} < x^2 < 1$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < |x| < 1 \qquad \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1 \\ -1 < x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

Et tantque $x \in E = E = [0, 1]$, alors $U^{-1}\left(\left]-\frac{1}{2}, 0\right[\right) = \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$.

1.3.3 Injection, surjection, bijection

Soient E et F deux ensembles non vides et soit U une application de E dans F $(U : E \longrightarrow F)$

Définition 1.3.4 *U est dite* ***injective*** *si pour tout x, x' de E, si $U(x) = U(x')$ alors $x = x'$, autrement dit*

$$\forall x, x' \in E,\ U(x) = U(x') \Longrightarrow x = x'$$

Définition 1.3.5 *U est dite* ***surjective*** *si pour tout élément y de F, il existe un élément x de E tel que $y = U(x)$.*

Autrement dit

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \text{ tel que } (y = U(x))$$

C'est à dire U est surjective si et seulement si $U(E) = F$.

1. U est injective si et seulement si tout élément y de F a au plus 1 antécédent (et eventuellement aucun).

2. U est surjective si et seulement si tout élément y de F a au moins 1 antécédent.

Exemple 1.3.3 *1- L'application* $\begin{array}{l} U : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q} \\ x \longrightarrow U(x) = \dfrac{1}{2+x} \end{array}$ *est injective. En effet*

Soient $x, x' \in \mathbb{N}$ supposons que $U(x) = U(x')$
$U(x) = U(x') \Longrightarrow \dfrac{1}{2+x} = \dfrac{1}{2+x'} \Longrightarrow 2+x = 2+x' \Longrightarrow x = x'$

2- L'application $\begin{array}{l} f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \\ x \longrightarrow f(x) = \dfrac{1}{2+x^2} \end{array}$ n'est pas injective car
Pour $x, x' \in \mathbb{N}$ supposons que $f(x) = f(x')$
$f(x) = f(x') \Longrightarrow \dfrac{1}{2+x^2} = \dfrac{1}{2+x'^2}$ et ce n'implique pas que $x = x'$. par exemple on a $f(-2) = f(2)$ et $-2 \neq 2$

3- L'application $\begin{array}{l} g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longrightarrow f(x) = x^2 \end{array}$ où $\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des nombres réelles positifs, est surjective.

En effet, soit $y \in \mathbb{R}_+$, supposons que $y = f(x) = x^2$ alors $x = \sqrt{y}$ alors
$\forall y \in \mathbb{R}_+$, $\exists x = \sqrt{y}$ tel que $y = f(x)$

4- L'appication $\begin{array}{l} h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) = x^2 \end{array}$ n'est pas surjectives car les nombres negatifs de $\mathbb{R}$ n'ont pas des antécédent dans $\mathbb{R}$ par h.

Bijection

Définition 1.3.6 *U est dite* ***bijective*** *si elle est injective et surjective. Cela équivaut à: pour tout y de F il existe un unique élément x de E tel que $y = U(x)$. Autrement dit*

$$\forall y \in F \ \exists! x \in E \ \ (y = U(x))$$

- L'existence de x vient de la surjectivité et l'unicité de l'injectivité. Autrement dit, tout élément de F a un unique antécédent par U.

Proposition 1.3.1 *Soient E et F deux ensembles et soit $U : E \longrightarrow F$ une application*

1. L'application U est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que
$$U \circ g = Id_F \text{ et } g \circ U = Id_E$$

2. Si U est bijective alors l'application g est unique et elle est aussi bijective. l'application g s'appelle "**la bijection réciproque**l" ou "**l'inverse**" de U et est noté U^{-1} De plus $(U^{-1})^{-1} = U$.

Soit U l'application de $]0, +\infty[$ dans $]0, 1[$ définie par $\forall x \in]0, +\infty[\,,\ U(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

1. Déterminer $U^{-1}\left(\left]\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]\right)$ et $U\left(]2, 4]\right)$.

2. Montrer que l'application U est bijective et déterminer U^{-1}Exercice 01(5 pts)

Soit U l'application de $]0, +\infty[$ dans $]0, 1[$ définie par $\forall x \in]0, +\infty[\,,\ U(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

1. $$\begin{aligned} U^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right) &= \left\{x \in]0, +\infty[\,,\ U(x) \in \left]\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right]\right\} \\ &= \left\{x \in]0, +\infty[\,,\ \tfrac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right\} = \left[\tfrac{1}{3}, 3\right[\end{aligned}$$

$U\left(]2, 4]\right) = \{y \in]0, 1[\,,\ \exists x \in]2, 4]\,,\ y = U(x)\}$
Si $2 < x \leq 4$ alors $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, donc $U\left(]2, 4]\right) = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$

2 Montrer que l'application U est bijective et déterminer U^{-1}

On montre que U est injective et surjective
a/ l'injectivité; soient $x,\ x' \in]0, +\infty[\,,$
$U(x) = U(x') \implies \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x'+1}} \implies x = x'$
alors U est injective
b/ La surjectivité, Soit $y \in]0, 1[\,,\ y = U(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \implies x = \dfrac{1}{y^2} - 1$
alors $\forall\ y \in]0, 1[\ \exists x = \dfrac{1}{y^2} - 1 \in]0, +\infty[$ tel que $y = U(x)$, donc U est surjective
U est injective et surjective donc elle est bijective et
$U^{-1} :]0, +\infty[\longrightarrow]0, 1[$ définie par $U^{-1}(x) = \dfrac{1}{x^2} - 1$

Chapitre 2

Conclusion générale