Résumé sur les fonctions circulaires réciproques

Fonction arcsinus (arcsin)

Bijection croissante de $[-1, 1]$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$

$\arcsin(\sin x) = x \quad \text{si} \quad x \in [-\pi/2, \pi/2]$

$\sin(\arcsin x) = x \quad \text{si} \quad x \in [-1, 1]$

Fonction impaire : si $x \in [-1, 1]$ on a $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

Fonction dérivable sur $]-1, 1[$: $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Fonction arccosinus (arccos)

Bijection décroissante de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$

$\arccos(\cos x) = x \quad \text{si} \quad x \in [0, \pi]$

$\cos(\arccos x) = x \quad \text{si} \quad x \in [-1, 1]$

Fonction dérivable sur $]0, \pi[$: $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Fonction arctangente (arctan)

Bijection croissante de $\mathbf{R}$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$

$\arctan(\tan x) = x \quad \text{si} \quad x \in]-\pi/2, \pi/2[$

$\tan(\arctan x) = x \quad \text{si} \quad x \in]-\infty, \infty[$

Fonction impaire : si $x \in \mathbf{R}$ on a $\arctan(-x) = -\arctan x$.

Fonction dérivable sur $\mathbf{R}$: $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Limites à l'infini : $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$

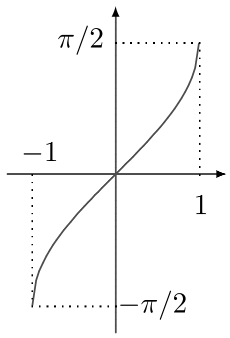
Formule utile : si $x > 0$, $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

Tableau de valeurs à savoir retrouver rapidement

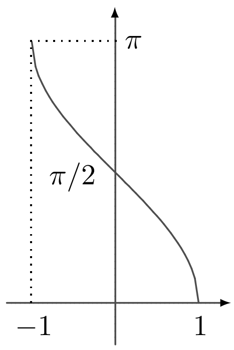
x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\arctan x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

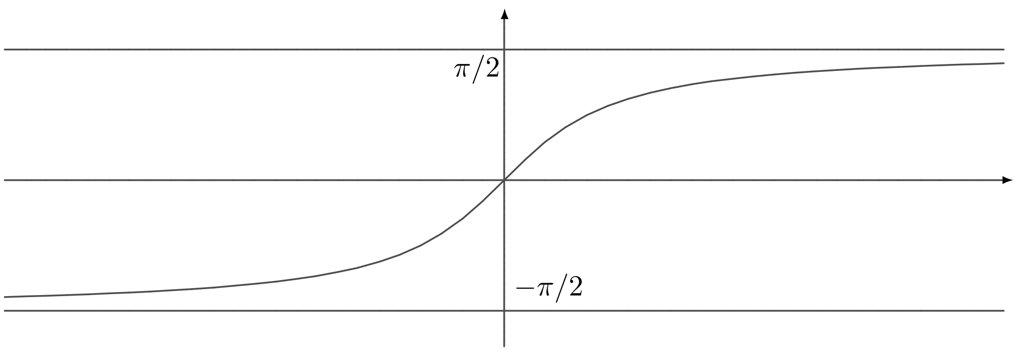
a) $\arcsin x$



b) $\arccos x$



c) $\arctan x$



Résumé sur les fonctions hyperboliques

Définitions : quel que soit $x \in \mathbf{R}$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

Fonction sinus hyperbolique (sh)

Bijection croissante de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$

Fonction impaire : si $x \in \mathbf{R}$ on a $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$.

Fonction dérivable sur $\mathbf{R}$: $f'(x) = \operatorname{ch} x$

Limites à l'infini : $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$

Fonction cosinus hyperbolique (ch)

Application de $\mathbf{R}$ sur $[1, +\infty[$. En particulier $\operatorname{ch} 0 = 1$.

Fonction paire : si $x \in \mathbf{R}$ on a $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$.

Fonction dérivable sur $\mathbf{R}$: $f'(x) = \operatorname{sh} x$

Limites à l'infini : $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$

Relations entre $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$: $\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = e^x$, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

Fonction tangente hyperbolique (th)

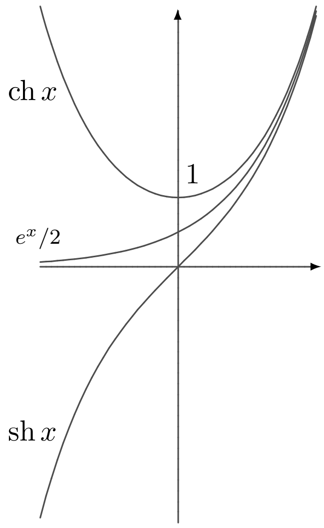
Bijection croissante de $\mathbf{R}$ sur $]-1, 1[$

Fonction impaire : si $x \in \mathbf{R}$ on a $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$.

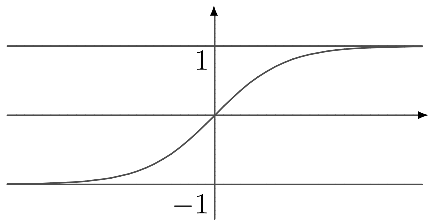
Fonction dérivable sur $\mathbf{R}$: $f'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$

Limites à l'infini : $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = +1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{th} x = -1$

d)



e) th x



Résumé sur les fonctions hyperboliques inverses

Fonction argument sinus hyperbolique (argsh)

Bijection croissante de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$

Fonction impaire : si $x \in \mathbf{R}$ on a $\operatorname{argsh}(-x) = -\operatorname{argsh} x$.

Fonction dérivable sur $\mathbf{R}$: $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Limites à l'infini : $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{argsh} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{argsh} x = -\infty$

Expression sous forme logarithmique : si $x \in \mathbf{R}$ on a $\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

Fonction argument cosinus hyperbolique (argch)

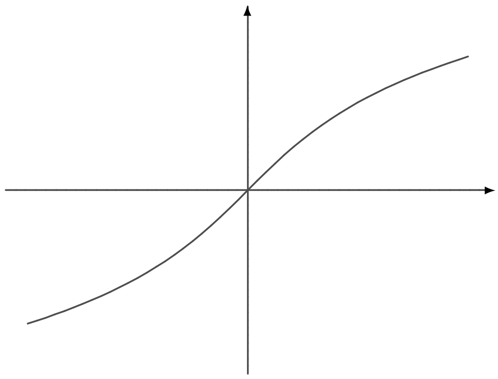
Bijection croissante de $[\,1, +\infty\,[$ sur $[\,0, +\infty\,[$

Fonction dérivable sur $]\,1, +\infty\,[$: $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Limites à l'infini : $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{argch} x = +\infty$

Expression sous forme logarithmique : si $x \in\,]\,1, +\infty\,[$ on a $\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

f) $\operatorname{argsh} x$



g) $\operatorname{argch} x$