Fonctions réelles :

Définition :

On appelle fonction numérique définie dans un domaine X toute application f telle que à chaque point x de X on fait correspond un seul élément y de $\mathbb{R}$.

Et on écrit :

$$f: X \to \mathbb{R}$$
$$x \to y = f(x)$$

X et le domaine de définition de f

$f(X) = \mathbf{Im}\, f = \{ y \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in X ;\ y = f(x) \}$ est l'ensemble des valeurs de f ou bien ensemble image de f .

Graphe d'une fonction :

On appelle graphe d'une fonction f le lieu géométrique des points $M(x, y)$ où $x \in X$ et $y = f(x)$ et on écrit :

$$G_f = \{M(x, y),\ x \in X \text{ et } y = f(x) \}$$

Opérations sur les fonctions réelles :

Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$,

Egalité et inégalité :

1. On dit que f est égale à g et on écrit : $f = g$ si $f(x) = g(x) \quad \forall\, x \in X$
2. On dit que f est inférieure ou égale à g et on écrit : $f \leq g$ si $f(x) \leq g(x)\ \forall\, x \in X$
3. On dit que f est supérieure ou égale à g et on écrit : $f \geq g$ si $f(x) \geq g(x) \quad \forall\, x \in X$.

Opérations arithmétiques :

La somme $(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall\, x \in X$

La différence $(f - g)(x) = f(x) - f(x)$, $\forall\, x \in X$,

Le produit $(f .\ g)(x) = f(x)\, g(x)$, $\forall\, x \in X$,

Le rapport $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}; \quad \forall x \in X, \quad g(x) \neq 0$

Composition de fonctions :

Soient $f: X \to \mathbb{R}$, $g: Y \to \mathbb{R}$, telles que $f(X) \subset Y$

On définit la fonction composée de f et g et on note $g \circ f$ la fonction définie sur X par :

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$; $\forall\, x \in X$.

Exemple :

Soient $f(x) = \cos x$ et $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$,

$(f \circ g)(x) = \cos(g(x)) = \cos x^2$ et $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = \cos^2 x$

Il est clair que $g \circ f \neq f \circ g$.

Propriétés générales des fonctions :

1. Fonctions paires et impaires :

Un ensemble $X \subset \mathbb{R}$, est dit symétrique par rapport à l'origine si : $\forall x \in X \Rightarrow -x \in X$

Définition :

La fonction f définie dans l'ensemble symétrique X :

- **i.** est dite paire si : $\forall x \in X,\ f(-x) = f(x)$
- **ii.** est dite impaire si : $\forall x \in X,\ f(-x) = -f(x),\ \forall x \in X$

Périodicité :

Soit $X \to \mathbb{R}$,

On dit que f est périodique s'il $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}_+$, tel que

i. $x + \alpha \in X$

ii. $f(x+\alpha) = f(x),\ \forall x \in X$

Et il est évident que : $f(x + k\alpha) = f(x)$

Définition :

On appelle période de f le plus petit nombre positif T tel que : $f(x+T) = f(x)$

Monotonie :

Soit $f: X \to \mathbb{R}$, f est dite :

1. Croissante si $\forall x_1, x_2 \in X,\quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
2. Strictement croissante si : $\forall x_1, x_2 \in X,\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
3. Décroissante si $\forall x_1, x_2 \in X,\quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
4. Strictement décroissante si $\forall x_1, x_2 \in X,\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Fonctions bornées :

Définition :

La fonction f est dite :

1. Majorée sur X s'il $\exists\ M \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M,\quad \forall x \in X$
2. Minorée sur X s'il $\exists\ m \in \mathbb{R},\ f(x) \geq m,\quad \forall x \in X$
3. Bornée sur X si elle est majorée et minorée simultanément c'est à dire :
   $m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in X$ ou $\exists\ c \in \mathbb{R}_+,\ |f(x)| \leq c,\ \forall x \in \mathbb{R}$,
4. Non bornée si $\forall c \in \mathbb{R}_+,\ \exists\ x' \in X$ tel que $|f(x')| > c$

Définition :

On appelle borne supérieure de f (resp. borne inférieure) sur X le plus petit majorant (resp. le plus grand minorant) de f et on écrit :

$$M = \sup_{x \in X} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 1/ \forall x \in X, f(x) \leq M \\ 2/ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in X, f(x) > M - \varepsilon \end{cases}$$

$$m = \inf_{x \in X} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 1/ \forall x \in X, f(x) \geq m \\ 2/ \forall \varepsilon > 0, \exists x_1 \in X, f(x) < m + \varepsilon \end{cases}$$

Théorème :

Toute fonction majorée (resp. minorée) admet une borne supérieure (resp. inférieure)

Maximum et minimum d'une fonction :

Soit $f: X \to \mathbb{R}$,

Définition :

On dit que f admet un maximum (resp. minimum) au point $x_0 \in X$ si

$\forall x \in X,\ f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).

Fonctions inverses :

Soit $f: X \to \mathbb{R}$, f est dite

1. Injective si $\forall x_1, x_2 \in X$, $(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$ ou bien $(x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2))$

2. Surjective si $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in X,\ y = f(x)$

3. Bijective si elle est à fois injective et surjective

Définition :

Soit $f: X \to Y$, f est dite inversible s'il existe $g: Y \to X$ telle que :

$(g \circ f)(x) = x$ et $(f \circ g)(y) = y$

la fonction g est dite inverse de f et on la désigne par $g = f^{-1}$ et on a : $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Propriétés :

Soit $f: X \to Y$ inversible (bijective) alors :

1. L'inverse de f^{-1} est f c'est à dire $(f^{-1})^{-1} = f$
2. Si f est impaire (resp. paire) alors f^{-1} est aussi impaire (resp. paire)
3. Si f est strictement monotone alors f^{-1} est aussi strictement monotone

Graphe d'une fonction inverse :

Soient G_f le graphe d'une fonction inversible et $G_{f^{-1}} = \{(y, f^{-1}(y)), y \in Y\}$ le graphe de f^{-1}

dans le repère cartésien Oxy alors on a :

$$(y, x) \in G_{f^{-1}} \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), y \in Y \Leftrightarrow y = f(x), x \in X \Leftrightarrow (x, y) \in G_f$$

C'est à dire que $G_{f^{-1}}$ est symétrique au G_f par rapport à la 1ère bissectrice d'équation $y = x$.

Fonctions usuelles – Fonctions élémentaires :

Les fonctions suivantes sont dites usuelles

1. Fonctions constantes : $f(x) = c$, $\forall x \in X$

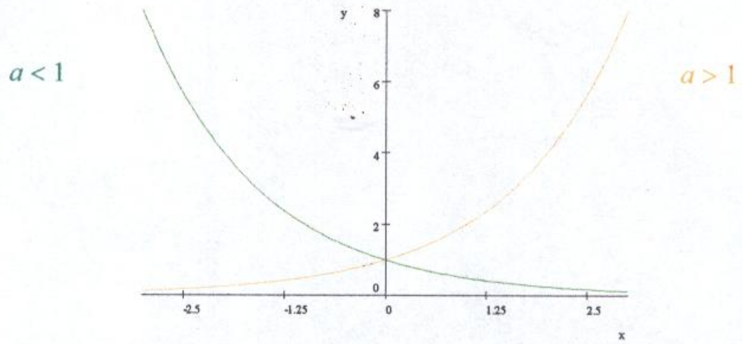
2. Fonctions puissances : $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
3. Fonction exponentielle de base « a » ($a > 0$, $a \neq 1$) : $f(x) = a^x$
4. Fonction logarithmique de base « a » ($a > 0$, $a \neq 1$): $f(x) = \log_a(x)$
5. Fonctions trigonométriques : sinus, cosinus, tangente et cotangente
6. Fonctions trigonométriques inverses : arc sinus, arc cosinus, arc tangente et arc cotangente

Propriétés :

i. Fonctions puissances : $f(x) = x^{\alpha} \begin{cases} \alpha = n: \quad D_f = IR \\ \alpha = -n: \quad D_f = IR^* \\ \alpha = \dfrac{p}{q}: \quad f(x) = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{p}; \quad D_f = \begin{cases} IR, & \text{si } q \text{ impair} \\ IR_+ & \text{si } q \text{ pair} \end{cases} \end{cases}$

ii. Fonction exponentielle de base a ($a > 0, a \neq 1$) :

$f(x) = a^x$, $D_f = \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_+$, et f croissante si $a > 1$, décroissante si $0 < a < 1$ et de plus $x = 0 \Rightarrow f(x) = 1$



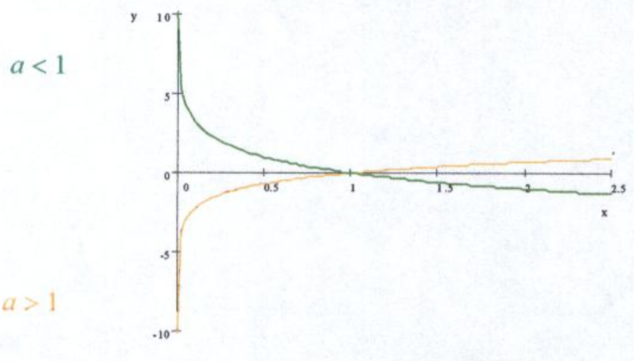
iii. Fonction logarithme de base a : ($a > 0, a \neq 1$)

$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$, $D_f = \mathbb{R}_+^*$ et $\operatorname{Im} f(x) = \mathbb{R}$,

$x = 1 \Rightarrow y = 0$

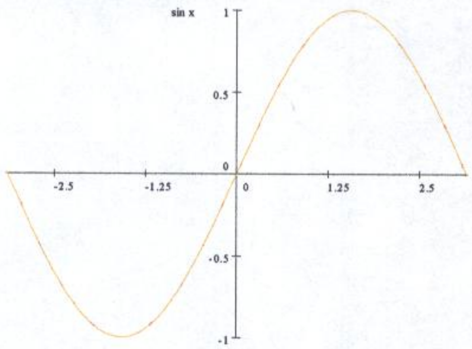
$y = \log_a x$ est croissante si $a > 1$ et décroissante si $a < 1$

Le graphe de $y = \log_a x$ est le symétrique de $y = a^x$ par rapport à la 1ère bissectrice $y = x$.



iv. Fonctions trigonométriques :

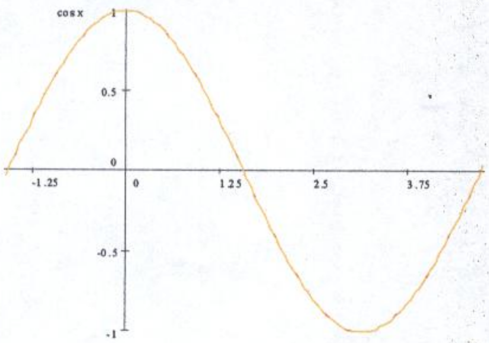
<u>la fonction sinus $y = \sin x$,</u>



1. $D_f = \mathbb{R}$
2. $y = \sin x$ est impaire périodique de période 2π
3. $|\sin x| \leq 1$
4. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n$
5. Dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ on a :

$y = \sin x$ est croissante dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante dans $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

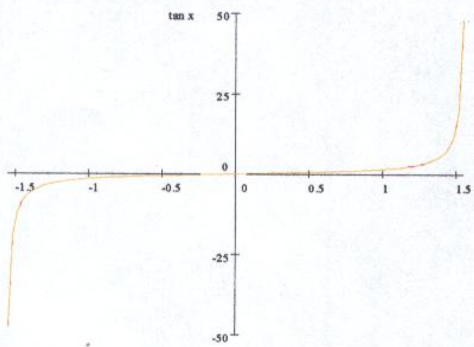
<u>La fonction cosinus $y = \cos x$</u>



1. $D_f = \mathbb{R}$
2. $y = \cos x$ est paire périodique de période 2π
3. $|\cos x| \leq 1$
4. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2 + \pi n$
5. $y = \cos x$ est croissante dans

$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ et décroissante dans $[0, \pi]$

<u>La fonction tangente $y = \tan x$:</u>

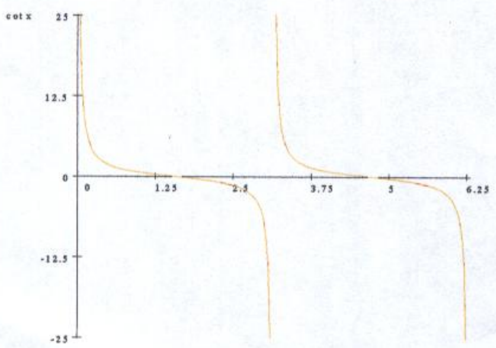


1. $y = \mathbf{tan}\, x = \frac{\mathbf{sin}\, x}{\mathbf{cos}\, x}, D_f = IR - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in IZ\right\}$

2. $\tan(-x) = -\tan x$ c – à – d $\tan x$ est impaire

3. $\tan x$ est périodique et de période $T = \pi$
4. $\tan x$ est une fonction croissante sur D_f
5. $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$,

<u>La fonction cotangente $y = \cot x$:</u>



$y = \mathbf{cot}\, x = \frac{\mathbf{cos}\, x}{\mathbf{sin}\, x}, \quad D_f = IR - \{k\pi, \quad k \in IZ\}$

$\mathbf{cot}\, x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\cot x$ est une fonction impaire décroissante sur D_f périodique de période $T = \pi$.

Fonctions trigonométriques inverses :

i. Fonction arc sinus :

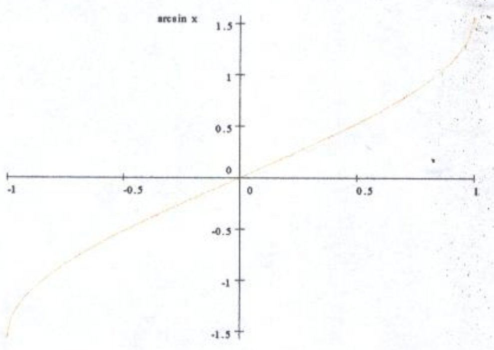
La fonction $\textbf{sin} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,+1]$ est continue et monotone donc bijective et inversible l'inverse de cette fonction est appelé arc sinus et on a :

$$\textbf{arcsin} : [-1,+1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y = \textbf{sin}\, x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \Leftrightarrow \quad x = \textbf{arcsin}\, y, \quad y \in [-1,+1] \quad \text{c'est à dire } D_f = [-1,+1]$$

Propriétés :

Soit $y =$ arcsin x, $x \in [-1, +1]$ alors on a :



arcsin $x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

1. $y =$ arcsin x est impaire ;

   arcsin $(-x) = -$ arcsin x, $\forall\, x \in [-1, +1]$
2. $y =$ arcsin x est une fonction croissante $\forall\, x \in [-1, +1]$
3. sin (arcsin x) $= x$, $\forall\, x \in [-1, +1]$
4. arcsin (sin x) $= x$, $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
5. **cos(arcsin** x**)** $= \sqrt{1-x^2}$, $\forall\, x \in [-1, +1]$
6. sin : $\mathbb{R} \to [-1, +1]$ n'est pas bijective car l'équation $y = \sin x$ admet une infinités de solutions : $x = (-1)^k \arcsin y + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Exemple :

Résoudre l'équation :

$$2\,\textbf{sin}\, x = 1 \Leftrightarrow \textbf{sin}\, x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = (-1)^k \left(\textbf{arcsin} \frac{1}{2}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

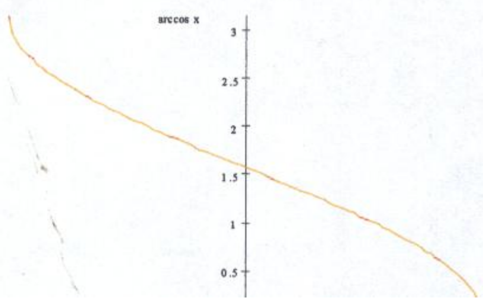
ii. Fonction arc cosinus :

La fonction $\textbf{cos} : [0, \pi] \to [-1,+1]$ est continue et décroissante donc bijective et inversible, on désigne son inverse par : arc cosinus et on a :

$\textbf{arccos}\, x : [-1,+1] \to [0, \pi]$

$y = \textbf{cos}\, x, \quad x \in [0, \pi] \quad \Leftrightarrow \quad x = \textbf{arccos}\, y, \quad y \in [-1,+1]$

Propriétés :



Soit $y =$ arccos x, $x \in [-1, +1]$ alors on a :

1. $\arccos x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

2. $y = \arccos x$ est décroissante $\forall x \in [-1, +1]$

3. $\cos(\arccos x) = x, \ \forall x \in [-1, +1]$

4. $\arccos(\cos x) = x, \ \forall x \in [-1, +1]$

5. $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

6. $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, $\forall x \in [-1, +1]$

7. $y = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, $\Leftrightarrow x = \pm \arccos y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

iii. Fonctions arc tangente :

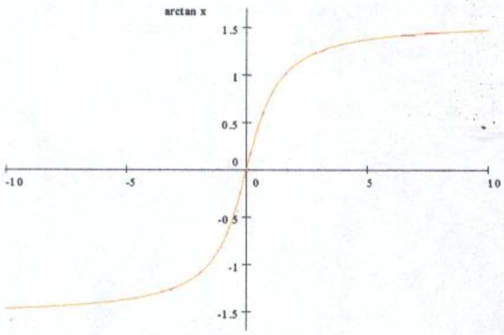
La fonction **tan :** $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\to IR$ est bijective alors elle est inversible et son inverse est noté arc tangent et on a :

tan : $IR \to \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

$y = \mathbf{tan}\, x, \quad x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\quad \Leftrightarrow \quad x = \mathbf{arctan}\, y, \quad y \in IR$

Propriétés :

Soit $y = \text{arc}\tan x$, $x \in \mathbb{R}$, alors :



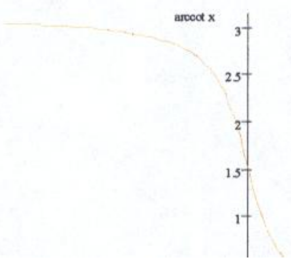
1. $\arctan x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\arctan(-x) = -\arctan x, \ \forall x \in \mathbb{R}$,
3. $\arctan x$ est une fonction croissante $\forall x \in \mathbb{R}$,
4. $\tan(\arctan x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$, et
   $\arctan(\tan x) = x$, $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$
5. $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x \in IR$

   $\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x \in \left]-1,+1\right[$

6. $y = \tan x$, et $x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in IZ\right\} \Leftrightarrow x = \arctan y + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

iv. Fonction arc cotangente :

La fonction **cot :** $\left]0, \pi\right[\to IR$ est bijective donc inversible, on note par arc cotangente son inverse alors on a :



arccot : $IR \to \left]0, \pi\right[$

$y = \mathbf{cot}\, x, x \in \left]0, \pi\right[\quad \Leftrightarrow \quad x = \mathbf{arccot}\, y, \quad y \in IR$

Propriétés :

Soit $y = \text{arccot}\, x$, $x \in \mathbb{R}$, alors :

1. $y = \operatorname{arccot} x$ est une fonction décroissante $\forall x \in \mathbb{R}$,

2. $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

3. $\cot(\operatorname{arccot} x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, & $\operatorname{arccot}(\cot x) = x$, $\forall x \in \left]0, \pi\right[$

4. $\arctan x + \operatorname{arc\,cot} x = \dfrac{\pi}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

Fonctions élémentaires :

On appelle fonction élémentaire toute fonction réelle obtenue à partir des fonctions usuelles à l'aide d'un nombre fini des opérations arithmétiques et de compositions de fonctions

Exemple :

$$y = \frac{x^2 + \mathbf{sin}\,3x + \mathbf{arcsin}\,x}{e^x + \mathbf{log}\,x}$$

Fonctions rationnelles :

On appelle fonction rationnelle le rapport de deux polynômes

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n} \text{ où } D_f = \{x,\ Q(x) \neq 0\}$$

Fonctions irrationnelles :

On appelle fonction irrationnelle toute fonction $y = f(x)$ où $f(x)$ est composée uniquement des opérations arithmétiques sur x et des puissance non entière.

Exemple :

$$y = f(x) = \sqrt[3]{1 - x^2}$$

Fonctions hyperboliques :

On appelle fonctions hyperboliques les fonctions suivantes :

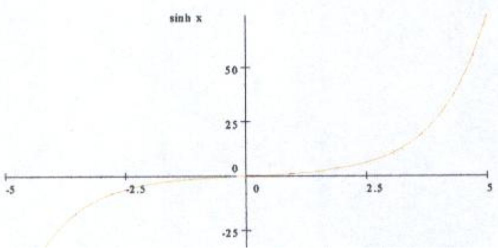
1. Fonction sinus hyperbolique : $y = \mathbf{sinh}\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in IR$

2. Fonction cosinus hyperbolique : $y = \mathbf{cosh}\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in IR$

3. Fonction tangente hyperbolique : $y = \mathbf{tanh}\,x = \dfrac{\mathbf{sinh}\,x}{\mathbf{cosh}\,x} = \dfrac{2e^x - 1}{2e^x + 1}$; $x \in IR$

4. Fonction cotangente hyperbolique :

$$y = \mathbf{coth}\,x = \frac{\mathbf{cosh}\,x}{\mathbf{sinh}\,x} = \frac{2e^x + 1}{2e^x - 1}, \quad x \in IR^*$$



Propriétés :

<u>Pour sinh :</u>

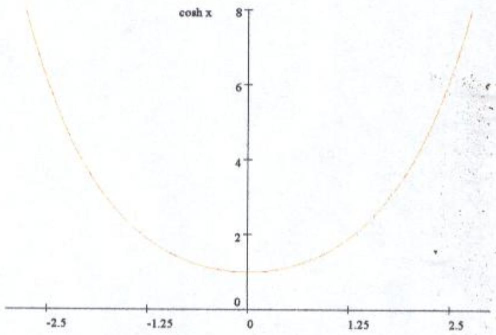
i. $\mathrm{sh}\, x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii. $\mathrm{sh}\ x$ est impaire

iii. $\mathrm{sh}\, x$ est strictement croissante

iv. $\mathrm{sh}\,(x_1 + x_2) = \mathrm{sh}\, x_1\ \mathrm{ch}\, x_2 + \mathrm{sh}\, x_2\ \mathrm{ch}\, x_1$

Pour cosh :



i. $\mathrm{ch}\, x \neq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$,

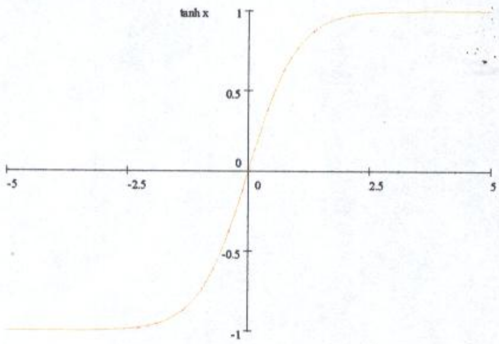
ii. $\mathrm{ch}\, x$ est paire

iii. $\mathrm{ch}\, x$ croissante dans $\mathbb{R}_+$ et décroissante dans $\mathbb{R}_-$

iv. $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$

v. $\mathrm{ch}(x_1 + x_2) = \mathrm{ch}\, x_1 \mathrm{ch}\, x_2 + \mathrm{sh}\, x_1\ \mathrm{sh}\, x_2$

Pour tanh :

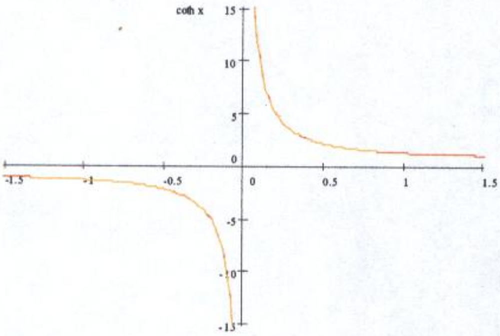


i. $\mathrm{th}\, x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii. $\mathrm{th}\, x$ est une fonction impaire

iii. $\mathrm{th}\, x$ est strictement croissante

Pour coth :



i. $\coth x \neq 0\ ,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^*$,

ii. $\coth x$ est une fonction impaire

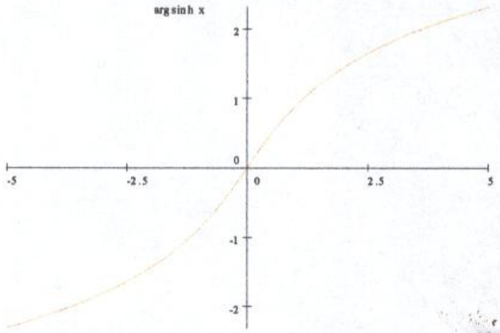
iii. $\coth x$ est strictement décroissante

Fonctions hyperboliques inverses :

1. Fonction sinus hyperbolique inverse :

sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective alors elle est inversible et l'inverse de cette fonction est appelée argument sinus hyperbolique notée argsinh et on a :

argsinh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que :



i. $y = \text{argsh}\, x$, $x \in \mathbb{R} \iff x = \text{sh}\, y$, $y \in \mathbb{R}$,

ii. $y = \text{argsh}\, x$ est une fonction paire

iii. $y = \text{argsh}\, x$ est strictement croissante

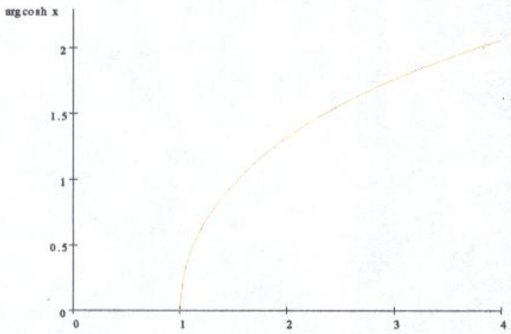
iv. argsh $x = 0 \iff x = 0$

Fonction cosinus hyperbolique inverse :

cosh : $[0,+\infty[\to [1,+\infty[$ est bijective donc inversible et l'inverse de cette fonction est dit argument cosinus hyperbolique noté argcosh ou directement argch telle que

argcosh : $[1,+\infty[\to [0,+\infty[$

$(y = \mathbf{cosh}\, x, \quad x \in [0,+\infty[) \iff (x = \mathbf{argcosh}\, y, \quad y \in [1,+\infty[)$

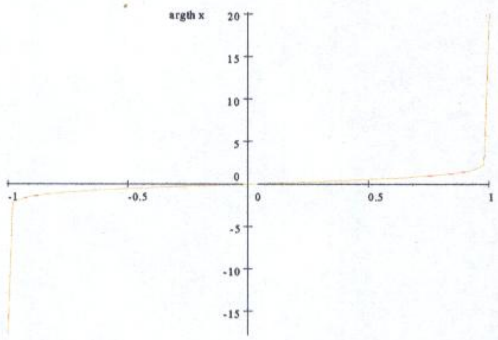


i . argch $x = 0 \iff x = 1$

ii $y =$ argch x est strictement croissante sur D_f

Fonction argument tangente hyperbolique :

tanh $x : IR \to]-1,+1[$ est bijective donc inversible et son inverse est la fonction **argtanh :** $]-1,+1[\to IR$ et on a :



i. $(y = \mathbf{tanh} x, \quad x \in IR) \iff (x = \mathbf{argtanh} y, \quad y \in]-1,+1[)$

ii. argth $x = 0 \iff x = 0$

iii $y =$ argth x est impaire et strictement croissante sur D_f.

Fonction argument cotangente hyperbolique :

coth $: IR^* \to]-\infty,-1[\cup]+1,+\infty[$ est bijective donc inversible et admet une fonction réciproque dite argument cotangente hyperbolique notée argcoth telle que :

arg coth $:]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\to IR^*$

$(y=\mathbf{coth}\,x,\quad x\in IR^*)\Leftrightarrow(x=\mathbf{arg\,coth}\,y,\quad |y|>1)$

y = argcoth est impaire et strictement décroissante sur D_f.

Théorème :

1. $\arg\sinh x=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\forall x\in IR$
2. $\arg\cosh x=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\forall x\geq 1$
3. $\arg\tanh x=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x},\forall x\in]-1,+1[$
4. $\arg\coth x=\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|,\quad |x|>1$

Preuve :

1. Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :

$$y=\mathbf{arg\,sinh}\,x\Leftrightarrow x=\mathbf{sinh}\,y=\frac{e^y-e^{-y}}{2}=\frac{e^{2y}-1}{e^y}\quad\Leftrightarrow\quad e^{2y}-2xe^y-1=0$$

$$\Leftrightarrow e^y=x\pm\sqrt{x^2+1}\Rightarrow e^y=x+\sqrt{x^2+1}\quad\Leftrightarrow\quad y=\mathbf{log}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

De même pour argch x, argth x et argcoth x.

Limites des fonctions :

Limite fine d'une fonction :

Soit f définie dans un voisinage de x_0 sauf peut être en x_0

Le nombre l est dit limite de f lorsque x tend vers x_0 est on écrit : $l=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ si :

$$\forall\varepsilon>0,\quad\exists\delta=\delta(\varepsilon)\in IR_+^*,\quad\forall x\in V(x_0),\quad\left(0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon\right)$$

Exemple :

Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$

En effet :

$|\sin x-0|=|\sin x|\leq|x|$

En posant $\delta(\varepsilon)<\varepsilon$ on obtient :

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0,\quad$ tel que $\quad|x|<\delta(\varepsilon)\Rightarrow|\mathbf{sin}\,x-0|=|x|<\varepsilon$

Définition 2 :

Le nombre l est dit limite de f lorsque x tend vers x_0 si pour toute suite (x_n) de $V^0(x_0)$ (voisinage épointé de x_0) convergente vers x_0 la suite $y_n=f(x_n)$ converge vers l

Et on écrit : $\forall\, x_n\in V^0(x_0)$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$$

Remarque :

D'après la définition 2 s'ils existent deux suites (u_n), (v_n) convergeant vers x_0 telles que $\lim_{n\to\infty} f(u_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(v_n)$ Alors la limite de f n'existe pas en x_0

Exemple :

Etudier la limite de $y = \sin\frac{\pi}{x}$ lorsque $x \to 0$

Soient $u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $v_n = \frac{1}{\frac{1}{2}+2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ alors on a :

$f(u_n) = \sin n\pi = 0$ et $f(v_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$

D'où on conclu que la limite de f n'existe pas.

Extension de la limite :

1. **Limites latérales en un point :**

Soit $V \subset \mathbb{R}$ un ensemble contenant l'intervalle $]a, x_0[$ (ou $]x_0, b[$)

Définition :

Le nombre $l \in \mathbb{R}$ est dit limite à droite (resp. à gauche) de f en x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in IR_+^*,\quad \forall x \in V,\quad \left(0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right)$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{Respectivement:}\\ \forall \varepsilon > 0,\quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in IR_+^*,\quad \forall x \in V,\quad \left(0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right)\end{array}\right)$$

On désigne

Limite à droite : $l = \lim_{x\to x_0^{+0}} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x) = f(x_0 + 0)$

Limite à gauche : $l = \lim_{x\to x_0^{-0}} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x) = f(x_0 - 0)$

Théorème :

$$\lim_{n\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow f(x+0) = f(x-0)$$

2. **Limite à l'infini :**

$$\left(\lim_{x\to+\infty} f(x) = l\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0,\quad \exists A > 0,\quad \forall x \in V(+\infty),\quad \left(x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right)\right)$$

Et

$$\left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = l\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0,\quad \exists A > 0,\quad \forall x \in V(-\infty),\quad \left(x < -A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right)\right)$$

3. **Limite infinie :**

1/ $\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow \left(\forall A > 0,\quad \exists \delta = \delta(A) > 0,\quad \forall x \in V(x_0),\quad \left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A\right)\right)$

2/ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty\right)\Leftrightarrow\left(\forall A>0,\quad \exists\delta=\delta(A)>0,\quad \forall x\in V(x_0),\quad \left(0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow f(x)<-A\right)\right)$

3/ $\left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty\right)\Leftrightarrow\left(\forall A>0,\quad \exists B>0,\quad \forall x\in V(+\infty),\quad \left(x>B\Rightarrow f(x)>A\right)\right)$

Unicité de la limite :

Si une fonction f admet une limite en x_0 alors elle est unique

Preuve :

On suppose que f admet les deux limites l_1, l_2 en x_0 alors on a :

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x)=l_1\right)\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0,\quad \forall x\in V(x_0),\quad \left(0<|x-x_0|<\delta_1\Rightarrow|f(x)-l_1|<\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x)=l_2\right)\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0,\quad \forall x\in V(x_0),\quad \left(0<|x-x_0|<\delta_2\Rightarrow|f(x)-l_2|<\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$

On pose $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ alors $0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow$ (1) et (2) vérifiées et donc :

$$|l_1-l_2|=|(l_1-f(x))+(f(x)-l_2)|\le|f(x)-l_1|+|f(x)-l_2|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\Rightarrow l_1-l_2=0\Rightarrow l_1=l_2$$

Propriétés locales :

Théorème :

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ alors il existe un voisinage du point x_0 dans lequel f est bornée

C'est à dire :

$\exists\ V(x_0)$ tel que $\forall\ x\in V(x_0),\ |f(x)|\le M.$

Passage à la limite dans les inégalités :

Théorème :

Soients f, g deux fonctions définies dans un voisinage de x_0 telles que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l_2$ et $l_1<l_2$

Alors il existe un voisinage épointé de x_0 dans lequel $f(x)\le g(x)$

Preuve :

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x)=l_1\right)\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0,\quad \forall x\in V^0(x_0),\quad \left(0<|x-x_0|<\delta_1\Rightarrow|f(x)-l_1|<\varepsilon\right)\right)..(1)$$

$$\left(\lim_{x\to x_0} g(x)=l_2\right)\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0,\quad \forall x\in V(x_0),\quad \left(0<|x-x_0|<\delta_2\Rightarrow|f(x)-l_2|<\varepsilon\right)\right)..(2)$$

Posons : $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ alors (1) et (2) sont vraies et $\forall x\in V(x_0),\quad 0<|x-x_0|<\delta$

D'autre part :

$|f(x)-l_1|<\varepsilon\Leftrightarrow l_1-\varepsilon<f(x)<l_1+\varepsilon$

Soit $l_1<l<l_2$

Prenons $\varepsilon = l - l_1 > 0 \Rightarrow l_1 - (l - l_1) < f(x) < l_1 + (l - l_1) \Rightarrow \forall x \in V(x_0), \quad 0 < |x - x_0| < \delta, \quad f(x) < l$...(3)

$|g(x) - l_2| < \varepsilon \Leftrightarrow l_2 - \varepsilon < g(x) < l_2 + \varepsilon$

Prenons $\varepsilon = l_2 - l > 0 \Rightarrow l_2 - (l_2 - l) < g(x) < l_2 + (l_2 - l) \Rightarrow \forall x \in V(x_0), \quad 0 < |x - x_0| < \delta, \quad g(x) > l$...(4)

De (3) et (4) on déduit $\forall x \in V(x_0), \quad 0 < |x - x_0| < \delta, \quad f(x) < g(x)$

Corollaire :

Soit f une fonction définie dans un voisinage de x_0 tels que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $f(x) > a$

alors $l \geq a$

Critère de la fonction intermédiaire :

Soient f, g, h trois fonctions définies dans un voisinage de pointé de x_0 telles que

$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \forall x \in V^0(x_0)$

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$

Démonstration :

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow$ pour toute suite x_n convergent e vers x_0, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = l$

$\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l \Leftrightarrow$ pour toute suite x_n convergent e vers x_0, $\lim\limits_{n \to +\infty} h(x_n) = l$

D' où $f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n), \quad \forall (x_n) \in V^0(x_0)$

D'après le théorème des trois suites on déduit que $\lim\limits_{x_n \to \infty} g(x_n) = l$

Ce qui est équivaut à dire $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$

Exemple :

Etudier la limite de $f(x) = x \sin \frac{1}{x}; \quad x_0 = 0$

On a $\forall x \in IR - \{0\}, \quad -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq +1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x & \text{si} \quad x > 0 \\ -x \geq x \sin \frac{1}{x} \geq x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

En passant à la limite on obtient

$\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

Opérations sur les limites :

Soient f, g deux fonctions définies dans un voisinage de x_0 telles que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$,

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$ et alors on a :

1/ $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = l_1 \pm l_2$

2/ $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x).g(x)) = l_1.l_2$

3/ $\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f(x)) = \lambda l_1$

4/ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{l_1}{l_2}$ si $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$

5/ $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|l_1|$

Démonstration :

Prouvons (4) par exemple :

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1 \Leftrightarrow$ pour toute suite x_n convergente vers x_0, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=l_1$

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l_2 \Leftrightarrow$ pour toute suite x_n convergente vers x_0, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n)=l_2$

D'après le théorème de la limite du rapport de deux suites on trouve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)}=\frac{l_1}{l_2}$$

Exemple :

Calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-4}-x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3x-4}{\sqrt{x^2+3x-4}+x}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x\left(3-\dfrac{4}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}}+1\right)}=\dfrac{3}{2}$

Fonction infinement grandes et infinement petites :

Soit f une fonction définie dans un voisinage pointé de x_0 alors :

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ alors f est dite infinement petite

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ alors f est dite infinement grande

Remarque :

Si f est une fonction infinement petite en x_0 et si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq 0$ dans $V^0(x_0)$ alors la fonction $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ est infinement grande.

Limites remarquables :

1. Démontrons que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

La fonction $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ est une fonction paire sur $\mathbb{R}^*$ il suffit alors de calculer la limite en 0^+. (à voir !)

2. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ en effet :

$$0<|1-\cos x|=\left|2\sin^2\frac{x}{2}\right|=2\sin^2\frac{x}{2}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\cos x=1$$

3. *a)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$; *b)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$; *c)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$

Pour (*b*) on pose $\arcsin x=y\Leftrightarrow \sin y=x$; $x\to 0\Rightarrow y\to 0$ donc on aura :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)=\dfrac{1}{2}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

Soit $x\to+\infty$, posons $E(x)=n$ alors :

$$n\le x<n+1\Rightarrow\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}\Rightarrow\frac{1}{n+1}+1<1+\frac{1}{x}\le 1+\frac{1}{n}\Rightarrow\underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\to e}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{e\leftarrow}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Cette formule est vraie quand $x\to-\infty$

Généralisation :

Soit à calculer $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}$; $f(x)>0$ alors on a les cas suivants :

i. Si $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l_1$ et $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=l_2$ alors $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=(l_1)^{l_2}$

ii. Si $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-1)g(x)}$

Exemples :

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x-1)\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=e$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+5}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{x+5}}=2^1=2$ car $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+5}{x+3}=2$ et $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3}{x-5}=1$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^0+a^1x+a^2x^2+\dots a^nx^n}{b^0+b^1x+b^2x^2+\dots b^mx^m}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^nx^n}{b^mx^m}=\begin{cases}\frac{a}{b} & \text{si } n=m\\ \infty & \text{si } n>m\\ 0 & \text{si } n<m\end{cases}$

Changement de variables dans le calcul de la limite :

Soient $y=f(x)$ définie dans un voisinage $V^0(x_0)$, $z=g(y)$ définie dans $W^0(y_0)$ vérifiant les relations :

$$f(x)\ne y_0,\quad\forall x\in V^0(x_0);\qquad\lim_{x\to x_0}f(x)=y_0\qquad\&\qquad\lim_{y\to y_0}g(y)=l$$

Alors $\lim\limits_{x\to x_0}g(f(x))=l$

Démonstration :

$$\left(\lim_{y\to y_0}g(x)=l\right)\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0,\quad\exists\delta_1>0,\quad\forall y\in V(y_0),\quad\left(0<|y-y_0|<\delta_1\Rightarrow|g(x)-l|<\varepsilon\right)\right)$$

$$\left(\lim_{x\to x_0}f(x)=y_0\right)\Leftrightarrow\left(\text{pour }\delta_1>0,\quad\exists\delta_2>0,\quad\forall x\in V(x_0),\quad\left(0<|x-x_0|<\delta_2\Rightarrow|f(x)-y_0|<\delta_1\right)\right)$$

Alorson obtient:

$$\forall x \in V(x_0), \quad \left(0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |y - y_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - l| < \varepsilon\right)$$

C - à - d: $\quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta_2 > 0, \quad \forall x \in V(x_0),$

$$\left(0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(f(x)) - l| < \varepsilon\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = l\right)$$

Exemple :

Calculer $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \tan x \right)$

Posons $x - \frac{\pi}{2} = y \Leftrightarrow x = y + \frac{\pi}{2}, \qquad x \to \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow y \to 0$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \tan x \right) = \lim_{y \to 0} \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right)} - \tan\left(\frac{\pi}{2} + y\right) \right) = \lim_{y \to 0} \left(\frac{1}{-\sin y} + \cot y \right)$$

$$= \lim_{y \to 0} \left(\frac{\cos y}{\sin y} - \frac{1}{\sin y} \right) = \lim_{y \to 0} \left(\frac{\cos y - 1}{\sin y} \right) = \lim_{y \to 0} \left(\frac{2\sin^2 \frac{y}{2}}{2\sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2}} \right) = \lim_{y \to 0} \tan \frac{y}{2} = 0$$

Limite d'une fonction monotone :

Soit f une fonction croissante (respectivement décroissante) sur l'intervalle = (a.b)

Si f est majorée (resp. minorée) sur l'intervalle I alors la limite de f existe et de plus :

$\lim_{x \to b-0} f(x) = \sup_{(a;b)} f(x)$ si f est majorée & $\lim_{x \to a+0} f(x) = \inf_{(a;b)} f(x)$ si f est minorée

Démonstration :

$$f \text{ majorée sur } \mathrm{I} = (\mathrm{a}; \mathrm{b}) \Rightarrow \exists M_0 = \sup_{(a;b)} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 1. & \forall x \in (a;b), \quad f(x) \leq M_0 \\ 2. & \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x' \in (a;b), \quad f(x) > M_0 - \varepsilon \end{cases}$$

f croissante sur $\mathrm{I} = (\mathrm{a}; \mathrm{b}) \Rightarrow (x' < x \Rightarrow f(x') < f(x))$

Posons $b - x' = \delta$ alors $x' = b - \delta$ et :

$x' < x < b \Rightarrow (b - \delta < x < b) \Rightarrow M_0 - \varepsilon < f(x') \leq f(x) < M_0 < M_0 + \varepsilon$

De cette façon :

$$b - \delta < x < b \Rightarrow M_0 - \varepsilon < f(x) < M_0 + \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - M_0| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to b-0} f(x) = M_0 = \sup_{(a;b)} f(x)$$

Critère de Cauchy :

Soit f une fonction définie dans un voisinage épointé de x_0

Définition :

On dit que f vérifie le critère de Cauchy au point x_0 si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x', x'' \in V^0(x_0)$

$\left(0 < |x' - x_0| < \delta \quad \& \quad 0 < |x'' - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon\right)$

Théorème :

Pour que la limite d'une fonction f existe en x_0 il faut et il suffit que f vérifie le critère de Cauchy en x_0.

Comparaison des fonctions – Notation de Landau :

Soient f, g deux fonctions définies dans un voisinage de x_0 sauf peut être en x (x_0 peut être égale à $+\infty$).

Fonctions négligeables :

On dit que f est négligeable devant g au voisinage du point x_0 s'il existe une fonction $h(x)$ infinement petite au point x_0 telle que :

$f(x) = h(x)g(x), \qquad \forall x \in V^0(x_0)$

On écrit : $f = o(g), (x \to x_0)$ (notation de Landau)

On lit : f égale à petit tau de g au voisinage de x_0

Propriétés :

1/ Si $g(x) \neq 0$, $\forall x \in V^0(x_0)$ alors : $f \underset{V(x_0)}{=} o(g) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

2/ $f \underset{V(x_0)}{=} l + o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ en particulier $f \underset{V(x_0)}{=} o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

Exemple :

$\sin^2 x = o(x), \quad x \to 0$

En effet :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin x}{x} . \sin x\right) = 1.0 = 0$$

Fonctions dominées :

On dit que la fonction f est dominée par la fonction g au point x_0 s'il existe $k > 0$ tel que $|f(x)| \leq k\ |g(x)|, \quad \forall x \in V^0(x_0)$

Et on écrit : $f = O(g)$, $(x \to x_0)$ (notation de Landau)

On lit : f égale à grand tau de g au voisinage de x_0.

Propriétés :

1/ Si $g(x) \neq 0$, $\forall x \in V^0(x_0)$ alors : $f \underset{V(x_0)}{=} O(g) \Leftrightarrow \exists k > 0, \quad \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \leq k$

2/ $f \underset{V(x_0)}{=} O(1) \Leftrightarrow \exists k > 0, \quad |f(x)| \leq k$

Exemple :

$2x \sin x = O(x^2), \quad x \to 0$

Fonctions équivalentes :

On dit que f est équivalente à g au voisinage du point x_0 s'il existe une fonction h telle que $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 1$ et $f(x) = h(x)g(x), \qquad \forall x \in V^0(x_0)$

On écrit $f \sim g, \quad (x \to x_0)$

On lit f est équivalente à g au voisinage de x_0.

Propriétés :

1/ Si $g(x) \neq 0, \quad \forall x \in V^0(x_0)$ alors : $\quad f \underset{V(x_0)}{\approx} g \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

2/ Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l \neq 0 \quad$ alors $\quad f \underset{V(x_0)}{\approx} g$

3/ Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \quad$ et $\quad f \underset{V(x_0)}{\approx} g \quad$ alors $\quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$

4/ $f \underset{V(x_0)}{\approx} g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x)(1 + \alpha(x)), \qquad \lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$

Théorème 1:

$$f \underset{V(x_0)}{\approx} g \Leftrightarrow f = g + o(g); \quad x \to x_0$$

Théorème 2 :

Soient $\quad f \underset{V(x_0)}{\approx} f_1; \qquad g \underset{V(x_0)}{\approx} g_1 \quad$ alors :

$$fg \underset{V(x_0)}{\approx} f_1 g_1 \qquad \text{et} \qquad \frac{f}{g} \underset{V(x_0)}{\approx} \frac{f_1}{g_1} \qquad \text{avec} \qquad (g \neq 0; \ g_1 \neq 0)$$

Démonstration :

$$f \underset{V(x_0)}{\approx} f_1 \Leftrightarrow f(x) = f_1(x) h_1(x) \qquad \& \qquad \lim_{x \to x_0} h_1(x) = 1$$

$$g \underset{V(x_0)}{\approx} g_1 \Leftrightarrow g(x) = g_1(x) h_2(x) \qquad \& \qquad \lim_{x \to x_0} h_2(x) = 1$$

$$f(x) g(x) = \underbrace{h_1(x) h_2(x)}_{h(x)} f_1(x) g_1(x) = h(x) f_1(x) g_1(x) \qquad \& \qquad \lim_{x \to x_0} h(x) = 1$$

Ce qui montre que $\quad fg \underset{V(x_0)}{\approx} f_1 g_1$

Remarque :

$$f \underset{V(x_0)}{\approx} f_1; \quad g \underset{V(x_0)}{\approx} g_1 \not\Rightarrow (f \pm g) \underset{V(x_0)}{\approx} (f_1 \pm g_1)$$

Exemple :

$\cos x \underset{V(0)}{\approx} 1 + x^3 \qquad \& \qquad -1 \approx -1 \qquad$ Mais $\qquad \cos x - 1 \not\approx x^3 \qquad$ car

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3} = -\frac{2}{4} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \frac{1}{x} = \infty$$

Composition des équivalences :

Soit $t = \varphi(x)$ définie dans $V^0(x_0)$

Soient $f(t)$, $g(t)$ définies dans $V^0(a)$

Si $\ f(t) \underset{V(a)}{\approx} g(t) \quad \& \quad \varphi(x) \underset{x \to x_0}{\to} a \quad$ avec $\quad \varphi(x) \underset{V(x_0)}{\neq} 0 \quad$ alors $\quad f(\varphi(x)) \underset{V(x_0)}{\approx} g(\varphi(x))$

Démonstration :

$$f \underset{V(a)}{\approx} g \Leftrightarrow f(t) = g(t)h(t) \quad \& \quad \lim_{t\to a} h(t) = 1$$

$$\Rightarrow f(\varphi(x)) = h(\varphi(x))g(\varphi(x)) \quad \& \quad \lim_{x\to x_0} h(\varphi(x)) = \lim_{t\to a} h(t) = 1$$

En posant $h(\varphi(x)) = h_1(x)$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} h_1(x) = 1$ et on obtient :

$$f(\varphi(x)) = h_1(x)g(\varphi(x)) \Leftrightarrow (fo\,\varphi) \underset{V(x_0)}{\approx} (go\,\varphi)$$

Remarque :

En général $f \underset{V(x_0)}{\approx} g \not\Rightarrow \varphi of \underset{V(x_0)}{\approx} \varphi og$

Exemple :

$f(x) = e^{x^2+x}$; $g(x) = e^{x^2}$; $\varphi(x) = \ln(x)$; $x_0 = 0$ on a $e^{x^2+x} \underset{V(0)}{\approx} e^{x^2}$

$\varphi of = \ln e^{x^2+x} = x^2 + x$; $\quad \varphi og = \ln e^{x^2} = x^2$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi of}{\varphi og} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

Donc

$$\varphi of \not\approx \varphi og$$

Tableau des équivalences des fonctions élémentaires :

La notion d'équivalence est très utile dans le calcul des limites. Pour cela on donne le tableau des équivalences des certaines fonction usuelles et élémentaires les plus utilisées et cela au voisinage de $x_0 = 0$:

1. $\ln(1+x) \approx x \Leftrightarrow \ln(1+x) = x + o(x)$
2. $e^x - 1 \approx x \Leftrightarrow e^x - 1 = x + o(x)$
3. $\sin x \approx x \Leftrightarrow \sin x = x + o(x)$
4. $\cos x - 1 \approx -\dfrac{x^2}{2} \Leftrightarrow \cos x - 1 \approx -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$
5. $\tan x \approx x \Leftrightarrow \tan x = x + o(x)$
6. $(1+x)^r - 1 \approx rx \Leftrightarrow (1+x)^r - 1 = rx + o(x), \forall r \in Q^+$
7. $\arcsin x \approx x \Leftrightarrow \arcsin x = x + o(x)$
8. $\arctan x \approx x \Leftrightarrow \arctan x = x + o(x)$
9. $\sinh x \approx x \Leftrightarrow \sinh x = x + o(x)$
10. $\cot x \approx \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \cot x = \dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Echelles de comparaisons des fonctions infinement petites – parties principales :

Soit g une fonction infinement petite au voisinage de point x_0 avec $g(x) \neq 0$

Définitions :

1. f est dite infinement petite d'ordre supérieure par rapport à g au point x_0 si g est négligeable devant f, c – à – d $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f \underset{V(x_0)}{=} o(g)$

2. f est dite infinement petite d'ordre inférieure par rapport à g au point x_0 si f est négligeable devant g, c – à – d $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow g \underset{V(x_0)}{=} o(f)$

3. f est dite infinement petite d'ordre k par rapport à g au point x_0 $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g^k(x)} = l \neq 0$

c – à – d $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{l.g^k(x)} = 1 \Leftrightarrow f \underset{V(x_0)}{\approx} l.g^k \Leftrightarrow f(x) = l.g^k(x) + o(g^k(x))$ dans ce cas la fonction $l.g^k(x)$ est dite partie principale de f en x_0 et on écrit :

$p.p.f(x) \underset{V(x_0)}{=} l.g^k(x)$

Échelle de comparaison des fonctions infinement grandes :

Soit g une fonction infinement grandes en x_0

Définition :

1. f est dite infinement grande d'ordre supérieure par rapport à g au point x_0 si g est négligeable devant g, c – à – d $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \Leftrightarrow g \underset{V(x_0)}{=} o(f)$

2. f est dite infinement grande d'ordre inférieure par rapport à g au point x_0 si f est négligeable devant g, c – à – d $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f \underset{V(x_0)}{=} o(g)$

3. f est dite infinement grande d'ordre k par rapport à g au $V^0(x_0)$ si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g^k(x)} = l \neq 0$

c – à – d $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{l.g^k(x)} = 1 \Leftrightarrow f \underset{V(x_0)}{\approx} l.g^k \Leftrightarrow f(x) = l.g^k(x) + o(g^k(x))$.

Exemple :

Déterminer la partie principale de la fonction $f(x) = 1 - \cos x$ au voisinage de $x_0 = 0$ de la forme $\alpha.x^\beta$. En effet :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\alpha.x^\beta} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\alpha.x^\beta} = \lim_{x \to 0} \frac{2.\frac{x^2}{4}}{\alpha.x^\beta} = \frac{1}{2\alpha} \lim_{x \to 0} x^{2-\beta} = 1 \quad ssi \quad \begin{cases} \beta = 2 \\ 2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc

$$p.p(1 - \cos x) = \frac{1}{2}x^2$$

Exemples de calcul de limite à l'aide des équivalences et à l'aide de petit « o » :

1. Calculer $\lim_{x \to 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 5x + 6}$

On a $\sin x \underset{V(0)}{\approx} x \Rightarrow \sin u(x) \underset{V(x_0)}{\approx} u(x)$ lorsque $\lim_{x \to x_0} u(x) = 0$ et donc :

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = -4$$

2. Calculer $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sqrt[3]{1+x}}{2\arctan x - \arcsin x}$

$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + o(x);$ $\quad o(x) \pm o(x) = o(x);$ $\quad e^x - 1 = x + o(x)$

$\arctan x = x + o(x);$ $\quad \arcsin x = x + o(x)$

Donc :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sqrt[3]{1+x}}{2\arctan x - \arcsin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + (e^x - 1) - \sqrt[3]{1+x}}{2\arctan x - \arcsin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + (x + o(x)) - \left(1 + \frac{1}{3}x + o(x)\right)}{2(x + o(x)) - (x + o(x))}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{3}x + o(x)}{x + o(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x\left(\frac{2}{3} + o(1)\right)}{x(1 + o(1))} = \frac{\frac{2}{3} + \lim\limits_{x \to 0} o(1)}{1 + \lim\limits_{x \to 0} o(1)} = \frac{2}{3}$$

Limites supérieures et limites inférieures :

Soit une fonction définie dans $V^0(x_0)$

Les valeurs suivantes $\lim\limits_{\delta \to 0} \sup f(x);$ $\lim\limits_{\delta \to 0} \inf f(x);$ $0 < |x - x_0| < \delta$ sont appelées respectivement limite supérieure et limite inférieure de f en x_0, on les désignes par

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = \lim_{x \to x_0} \sup f(x) \qquad \& \qquad \underline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = \lim_{x \to x_0} \inf f(x)$$

Théorème :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = \underline{\lim_{x \to x_0}} f(x)$$

Définition :

Le nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ est dit limite partielle de f en x_0 (ou valeur d'adhérence) s'il existe une suite (x_n) différente de x_0 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \lambda$

On désigne par $\wedge_{(x_0)}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de f en x_0.

Alors

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = \sup \wedge_{(x_0)} \quad et \quad \underline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = \inf \wedge_{(x_0)}$$

Exemple :

Déterminer $\overline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x);$ $\underline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x)$ où $f(x) = \cos\frac{1}{x};$ $x_0 = 0$

Pour $x_n = \frac{1}{2\pi n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} \cos(2\pi n) = 1 \quad \text{car} \quad |\cos x| \leq 1$$

Pour $x_n' = \frac{1}{\pi + 2\pi n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n') = \lim_{n \to +\infty} \cos(\pi + 2\pi n) = -1$$

Donc

$$\wedge_{(0)} = \{-1, +1\} \Rightarrow \overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = 1; \quad \underline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = -1$$

Fonctions continues :

Définition :
On dit que la fonction f est continue en x_0 de $\in \mathbb{R}$ si :
1/ f est définie dans un voisinage de x_0
2/ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Autrement dit :
$$(f \text{ continue en } x_0) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in V^0(x_0); \quad \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right)\right)$$

Accroissement de la fonction :
Soit f une fonction définie dans un voisinage de x_0, la valeur $x - x_0 = \Delta x$ est appelée accroissement de l'argument x au point x_0
La valeur $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x)$ est appelée accroissement de la fonction $f(x)$ au point x_0

Définition 2 (à l'aide des suites) :
Soit f une fonction définie dans un voisinage V de x_0, on dit qu'elle est continue en x_0 si :
$\forall (u_n) \subset V; \quad \left(\lim\limits_{n \to \infty} u_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = f(x_0)\right)$

Continuité à droite – continuité à gauche :
i . f est dite continue à droite de $x_0 \in \mathbb{R}$ si :
  1/ f est définie sur $[x_0, b]$
  2/ $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$

ii. f est dite continue à gauche de $x_0 \in \mathbb{R}$ si :
  1/ f est définie sur $[a, x_0]$
  2/ $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$

Théorème :
Pour que f soit continue en x_0 il faut et il suffit :
$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$

Continuité sur un ensemble :
f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de cet intervalle.

Discontinuité – Classification des points de discontinuité :
Définition :
La fonction f est dite discontinue en un point x_0 si elle n'est pas continue en x_0 c'est-à-dire :
1/ f n'est pas définie en x_0
2/ La limite de f en x_0 existe mais différente de $f(x_0)$
3/ La limite de f en x_0 n'existe pas.

Pour le 1er cas :
Si f n'est pas définie en x_0 mais $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ alors en posant $f(x_0) = l$ on rend f continue en x_0 (c – à – d on a prolongé par continuité f en x_0)
Le point x_0 est dit dans ce cas *point de discontinuité éliminable*

Exemple :
La fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas définie en $x_0 = 0$ mais $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
Alors en posant $f(0) = 1$ on obtient une fonction continue en $x_0 = 0$
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Pour le $2^{ème}$ cas :

$\exists \quad f(x_0+0), \quad \exists \quad f(x_0-0), \quad$ mais $\quad f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$

Le point x_0 est dit *point de discontinuité de $1^{ère}$ espèce.*

Exemple :

$f(x) = E(x), \quad x_0 = m; \quad m \in Z$

$$\lim_{\substack{x \to m \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to m \\ >}} E(x) = m \qquad \& \qquad \lim_{\substack{x \to m \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to m \\ <}} E(x) = m-1$$

Donc :

$$f(m+0) \neq f(m-0)$$

Pour le $3^{ème}$ cas :

Si l'une des limites $f(x_0+0)$ où $f(x_0-0)$ n'existe pas ou infinie le point x_0 est dit *point de discontinuité de $2^{ème}$ espèce.*

Exemple :

$$f(x) = \frac{1}{x-2}; \quad x_0 = 2, \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \pm\infty$$

Points de discontinuité des fonctions monotones :

Théorème :

Toute fonction monotone sur un intervalle (a, b) ne peut posséder que des points de discontinuité du $1^{ère}$ espèce.

Démonstration :

Soit f une fonction croissante sur (a, b) et soit $x_0 \in (a, b)$,

Pour tout point $x \leq x_0$ on a $f(x) \leq f(x_0)$

D'après le théorème de la limite d'une fonction monotone il vient que :

$$f(x_0-0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) \leq f(x_0)$$

Et donc

Si $f(x_0-0) = f(x_0)$ alors f est continue à gauche de x_0

Si $f(x_0-0) < f(x_0)$ alors x_0 est un point de discontinuité de $1^{ère}$ espèce.

Opération sur les fonctions continues :

Soient f, g deux fonctions continues en un point x_0 alors

$f \pm g; \quad fg; \quad \lambda f(\lambda \in IR); \quad \dfrac{f}{g}(g(x_0) \neq 0) \quad et \quad |f|$ sont des fonctions continues en x_0

Démonstration :

f est continue $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

g est continue $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$

Soit $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ alors

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = \varphi(x_0)$$

Continuité de la fonction composée :

Soient $y = f(x)$ continue en x_0, $z = g(y)$ continue en $y_0 = f(x_0)$

Alors la fonction composé $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ est continue en x_0

Démonstration :

Soit (x_n) une suite arbitraire appartenant au domaine de définition de la fonction $y = f(x)$ telle que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$

Puisque f est continue en x_0 et g continue en $y_0 = f(x_0)$ on a :

$$\lim_{x\to x_0}(gof)(x) = \lim_{n\to\infty} g\left(f(x_n)\right) = g\left(\lim_{n\to\infty} f(x_n)\right) = g\left(f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\right) = g\left(f(x_0)\right) = (gof)(x_0)$$

Ce qui montre que $(g\ o\ f)$ est continue en x_0.

Continuité des fonctions monotones :

Si f est strictement monotone sur un intervalle $I = (a,\ b)$ et l'image $f(I) = J$ est un intervalle alors f est continue dans I.

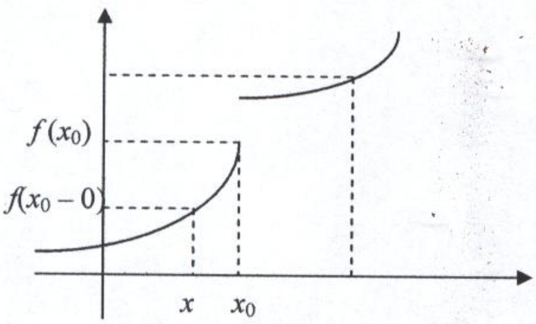
Démonstration :

Démontrons par l'absurde

On suppose que f admet un point de discontinuité x_0 dans $I = (a,\ b)$

x_0 ne peut être qu'un point de discontinuité de 1$^{\text{ère}}$ espèce (car f monotone)

Pour tout point $x < x_0$ on a $f(x) < f(x_0 - 0) < f(x_0)$ (on suppose qu'elle est croissante)



Considérons l'intervalle $]f(x_0 - 0), f(x_0)[$

$\forall\ y \in\ ]f(x_0 - 0), f(x_0)[$ il n'existe aucun point $x \in (a,\ b)$ tel que $y = f(x)$

Et ceci contredit l'hypothèse du théorème que $f(I) = J$ est un intervalle.

Continuité des fonctions usuelles et élémentaires :

Théorème :

Toutes les fonctions usuelles et élémentaires sont continues chacune dans son domaine de définition.

1. $y = \sin x$, $x_0 \in \mathbb{R}$, arbitraire

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x - x_0}{2}\cos\frac{x - x_0}{2}\right| \le 2\frac{|x - x_0|}{2}.1 = |x - x_0| \quad \text{car} \quad |\sin\alpha| \le |\alpha| \quad \text{et} \quad \cos\alpha \le 1$$

On choisit : $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ alors $|x - x_0| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$

Donc $y = \sin x$ est continue en x_0.

2. $y = \cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ *et* $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ sont continues car ce sont des fonctions composées.

3. $y = a^x$ $(a > 0,\quad a \ne 1)$ est continue car elle est monotone …etc.

Propriétés des fonctions continues :

Théorème : (Bolzano Cauchy) :

Soit f une fonction définie et continue sur un segment $[a,\ b]$ telle que $f(a)\ f(b) < 0$ (c'est – à – dire que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires) alors au moins un point $c \in [a,\ b]$ vérifiant $f(c) = 0$.

Théorème des valeurs intermédiaires de Bolzano Cauchy :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soient $a,\ b \in \mathrm{I}$ $(a < b)$ alors pour tout point α compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un nombre c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = \alpha$.

Démonstration :

Posons $g(x) = f(x) - \alpha$ alors

$$\left.\begin{array}{l} g(a) = f(a) - \alpha < 0 \\ g(b) = f(b) - \alpha > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(a)g(b) < 0$$

$$\exists c \in \left]a, b\right[, g(c) = 0 \Rightarrow f(c) - \alpha = 0 \Rightarrow f(c) = \alpha$$

Corollaire :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Premier théorème de Weierstrass :

Toute fonction définie et continue sur un segment fermé $[a, b]$ est bornée.

Démonstration :

Par l'absurde, on suppose que f n'est pas bornée sur $[a, b]$ alors il existe (x_n) dans $[a, b]$ telle que $f(x_n) > n$

(x_n) est une suite bornée donc on peut extraire de x_n une sous suite convergente vers x_0 soit :

$$x_{n_k} \longrightarrow x_0 \Rightarrow f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x_0) \Rightarrow f(x_{n_k}) \text{ est bornée ce qui contredit l'hypothèse } f(x_{n_k}) > n_k$$

Deuxième théorème de Weierstrass :

Soit f une fonction définie et continue sur un segment fermé $[a, b]$ alors elle atteint ses bornes supérieure et inférieure.

Démonstration :

Désignons $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$ et démontrons que $\exists x_1 \in [a, b], f(x_1) = \sup\limits_{[a,b]} f(x) = M$

En effet ;

$$M = \sup_{[a,b]} f(x) \Rightarrow \forall x \in [a, b], f(x) \leq M$$

Supposons (par l'absurde) que $f(x) < M, \quad \forall x \in [a, b]$ et considérons la fonction $\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$

alors $\varphi(x)$ est continue sur $[a, b] \overset{1^{\text{ère}} \text{ théorème de Weierstrass}}{\Rightarrow} \exists c > 0, \quad \varphi(x) < c \Rightarrow \dfrac{1}{M - f(x)} < c$

$$\Rightarrow M - f(x) > \frac{1}{c} \Rightarrow f(x) < M - \frac{1}{c}$$

Ceci contredit le fait que M est le plus petit majorant de f.

Théorème de la fonction réciproque :

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathrm{I} = [a, b]$ strictement croissante (resp. décroissante) alors f admet une fonction réciproque définie strictement croissante (resp. décroissante) sur l'intervalle $J = f(I)$ et il est clair que

$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ si f croissante et $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$ si f décroissante.

Continuité uniforme :

Définition :

La fonction f définie sur l'intervalle I est dite uniformément continue sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0; \quad \forall x, x' \in I; \quad (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

Remarque :

Il est clair que la continuité uniforme sur un intervalle I entraîne la continuité simple en tout point x_0 de I et ceci en prenant x' au lieu de x_0 dans la définition.

La réciproque en général n'est pas vraie mais le théorème suivant est vrai :

Théorème (Cantor) :

Toute fonction définie et continue sur un segment $[a, b]$ est uniformément continue sur ce segment.

Démonstration :

Démontrons par l'absurde, supposons que f n'est pas U. C. sur $[a, b]$ c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \delta = \delta(\varepsilon) > 0; \quad \exists\, x, x' \in I; \quad (|x - x'| < \delta \ \wedge\ |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon)$$

Considérons une suite (δ_n) convergente vers 0 alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \delta_n > 0; \quad \exists\, x_n, x_n' \in I; \quad (|x_n - x_n'| < \delta \ \wedge\ |f(x_n) - f(x_n')| \geq \varepsilon)$$

Les suites x_n, x_n' sont bornées et de toute suite bornée on peut extraire une suite convergente (théorème de Bolzano – Cauchy) alors ils existent $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ et $(x'_{n_k}) \subset (x'_n)$ convergentes ce qui implique

$$|x_{n_k} - x'_{n_k}| < \delta_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

Par suite

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = \lim_{k \to \infty} x'_{n_k} = x_0$$

D'après la continuité de f sur [a, b] on obtient :

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{k \to \infty} (f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})) = 0$$

Ceci contredit le fait que $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon; \quad n = 1, 2, \ldots$

Exemple :

La fonction $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 25}$ est uniformément continue sur [1, 3]

Fonctions dérivables :

Dérivées en un point :
Soit f une fonction définie dans un voisinage $V(x_0)$ du point x_0 de $\mathbb{R}$,

Définition :

On dit que f est dérivable en x_0 si la limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie, cette limite est appelée dérivé de f en x_0 on la désigne $f'(x_0)$.

Autres écritures :

- En posant $x - x_0 = \Delta x = h$ on obtient

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Exemple :
Trouver la dérivée de $y = x^3$ en un point x_0 de $\mathbb{R}$,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^{\ 3}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + x.x_0 + x_0^{\ 2})}{x - x_0} = x_0^{\ 2} + x_0^{\ 2} + x_0^{\ 2} = 3x_0^{\ 2}$$

Différentiabilité en un point :

Définition :

On dit qu'une fonction f est différentiable si

1. f est définie au voisinage de x_0
2. Il existe un nombre A de $\mathbb{R}$ et une fonction infinement petite $\alpha(x)$ telle que l'accroissement Δf de f correspond à l'accroissement Δx de x et on écrit :

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = A.\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x; \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0 \qquad \ldots(*)$$

Le théorème suivant est vrai :

Théorème :

Pour qu'une fonction soit différentiable en un point x_0 il faut et il suffit qu'elle soit dérivable en ce point

Condition nécessaire :

Si f est différentiable en x de $\mathbb{R}$, alors (*) est vraie et donc

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha(\Delta x)) = A \Rightarrow f'(x) = A$$

Condition suffisante :

f est dérivable en x de $\mathbb{R}$ démontre que f est différentiable en ce point, ça découle de la définition.

Théorème :
Toute fonction dérivable en un point x_0 est continue en ce point.

Démonstration :

$$f \text{ dérivable en } x_0 \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+\alpha(x-x_0) \quad où \quad \lim_{x\to x_0}\alpha(x-x_0)=0$$

$$\Rightarrow f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x-x_0)(x-x_0)$$

$$\Rightarrow f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x-x_0)(x-x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Remarque :

La réciproque est fausse

Exemple :

La fonction $y=|x|$, $x_0=0$ est fonction continue en $x_0=0$ mais :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\begin{cases}+1 & si \quad x>0\\ -1 & si \quad x<0\end{cases}$$

Donc elle n'est pas dérivable en x_0.

Dérivées à gauche et à droite :

Définition :

On dit que f est dérivable en x_0 à droite (resp. à gauche) si :

1. f est définie sur $[x_0, b]$, (resp. $[a, x_0]$)
2. $\exists \lim\limits_{x\xrightarrow{>}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_+(x_0)$; $\left(\text{resp. } \exists \lim\limits_{x\xrightarrow{<}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_-(x_0)\right)$

Théorème :

Pour qu'une fonction f soit dérivable au point x_0 il faut et il suffit qu'elle soit dérivable en x_0 à gauche et à droite et que $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$

Différentielle :

Soit f une fonction dérivable en x_0 alors $f(x)-f(x_0)=f'(x_0)+\alpha(x-x_0)(x-x_0)$

Posons : $x-x_0=\Delta x \Rightarrow x=x_0+\Delta x$

$$f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\alpha(\Delta x).\Delta x \quad\Rightarrow\quad \Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

Donc :

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x).\Delta x$$

Définition :

L'expression $f'(x)\Delta x$ est appelée différentielle de f en x on la désigne $df(x)=f'(x)\Delta x$

En particulier pour $f(x)=x$ on a $f'(x)=1$, $dx=1.\Delta x=\Delta x$

Par suite :

$$df(x)=d'(x)\Delta x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{df(x)}{\Delta x}$$

Application de la différentielle au calcul approché :

Donner une valeur approchée de $\sqrt{1.0005}$

Si f est dérivable en x_0 de D_f alors :

$$\Delta f(x)=df(x)+\alpha(\Delta x).\Delta x \Rightarrow \Delta f(x)\approx df(x) \Rightarrow f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$$

$$x-x_0=\Delta x \Leftrightarrow x=x_0+\Delta x$$

Si $x_0=0$ alors $f(x)=f(0)+f'(0)x$

Dans notre exemple :

$$f(x)=(1+x)^{\alpha} \Rightarrow f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(0)=1; \quad f'(0)=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f(x)\approx 1+\frac{1}{2}x$$

Donc

$$\sqrt{1.0005}=\sqrt{1+0.0005}=1+\frac{1}{2}.(0.0005)=1.00025$$

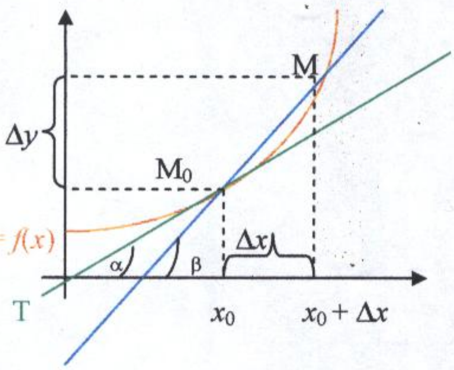
Interprétation géométrique de la dérivée :

Soit f une fonction dérivable en x_0 et $f'(x_0)\neq 0$, on désigne par C, la courbe représentative de f,

MM_0 est la sécante à la courbe C

$M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ point variable sur C

Lorsque $\Delta x \to 0$, $M \to M_0$ et la sécante MM_0 prend la position de la tangente M_0T



$$\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\tan\beta \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\beta\to\alpha}\tan\beta=\tan\alpha \Rightarrow f'(x_0)=\tan\alpha$$

Opérations arithmétiques sur les dérivées :

Soient f, g deux fonctions dérivables en x_0 alors :

$f\pm g$; $f.g$; $\lambda g(\lambda\in IR)$; $\frac{f}{g}$(si $g(x)\neq 0$ dans $V(x_0)$) sont des fonctions dérivables en x_0 et on a :

1. $(f\pm g)' = f' \pm g'$
2. $(f.g)' = f'.g + g'.f$
3. $(\lambda f)' = \lambda f'$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - g'.f}{g^2}$

Démontrons la 1ère relation par exemple :

$$(f+g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)+g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Dérivée d'une fonction composée :

Si $y = f(x)$ est dérivable en x_0 et $z = g(y)$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ alors la fonction composée $(g \text{ o } f)(x) = g(f(x))$ est dérivable en x_0 et on a :

$$(gof)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Démonstration :

$$(gof)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(gof)(x) - (gof)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(y_0)f'(x_0)$$

Et ceci car $y = f(x)$ est dérivable en x_0 donc continue en ce point.

Dérivée d'une fonction inverse :

Théorème :

Si f est bijective au voisinage de x_0 et $f'(x_0)$ existe et non nulle alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ de plus :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Démonstration :

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\dfrac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Théorème :

Les fonctions usuelles et élémentaires suivantes sont dérivables dans les domines indiqués et on a :

1/ $y = cte, \quad y' = 0, \quad \forall x \in IR$

2/ $y = x^\alpha; \quad y' = \alpha x^{\alpha - 1}, \quad x > 0$

3/ $y = a^x, \quad y' = a^x \ln a, \quad \forall x \in IR, (a > 0 \quad et \quad a \neq 1)$

4/ $y = \log_a x; \quad y' = \dfrac{1}{x} \log_a e; \quad x > 0, (a > 0 \quad et \quad a \neq 1)$

5/ $y = \sin x, \quad y' = \cos x, \quad \forall x \in IR$

6/ $y = \cos x, \quad y' = -\sin x, \quad \forall x \in IR$

7/ $y = \tan x, \quad y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

8/ $y = \cot x, \quad y' = \dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi$

9/ $y = \arcsin x, \quad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in]-1, +1[$

10/ $y = \arccos x, \quad y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in]-1, +1[$

11/ $y = \arctan x, \quad y' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in IR$

12/ $y = arc\cot x, \quad y = \dfrac{-1}{1+x^2}, \quad x \in IR$

13/ $y = \sinh x, \quad y' = \cosh x, \quad x \in IR$

14/ $y = \cosh x, \quad y' = \sinh x, \quad x \in IR$

15/ $y = \tanh x, \quad y' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}, \quad x \in IR$

16/ $y = \coth x, \quad y' = \dfrac{-1}{\sinh^2 x}, \quad x \neq 0$

17/ $y = \arg\sinh x, \quad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in IR$

18/ $y = \arg\cosh x, \quad y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$

19/ $y = \arg\tanh x, \quad y' = \dfrac{1}{1-x^2}, \quad x \in \left]-1,+1\right[$

20/ $y = \arg\coth x, \quad y' = \dfrac{-1}{1-x^2}, \quad |x| > 1$

Démonstration :

3/ $\left(a^x\right)' = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^h - 1}{h} = a^x \ln_a e$

4/ $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{\left(a^y\right)'} = \dfrac{1}{a^y \log_a e} = \dfrac{1}{x \log_a e}; (y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y)$

5/ $\left(\cos x\right)' = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = -\lim\limits_{h\to 0} \sin\left(x+\frac{h}{2}\right) \underbrace{\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{=1} = -\sin x$

9/ $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\left(\sin y\right)'} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y)$

Exemple :

Calculer la dérivée de la fonction composée $y = \ln^4\left(\arctan \dfrac{x}{x^2+1}\right)$

$$y' = 4\left(\arctan \tfrac{x}{x^2+1}\right)' \ln^3\left(\arctan \tfrac{x}{x^2+1}\right) = 4 \frac{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'}{1+\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2} \ln^3\left(\arctan \tfrac{x}{x^2+1}\right)$$

$$= 4 \frac{\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}{1+\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2} \ln^3\left(\arctan \tfrac{x}{x^2+1}\right)$$

Remarque :

Si f est dérivable en x_0 et $f(x_0) \neq 0$ alors la fonction $y = \log|f(x)|$ est dérivable en x_0 et on a : $\left(\log|f(x)|\right)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

Dérivées d'ordres supérieures :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors f' est dite dérivée d'ordre 1 de f,

Si la dérivée $y' = f'(x)$ est dérivable sur I alors sa dérivée s'appelle dérivée d'ordre 2 de f

notée f'' et on a $f''(x) = (f'(x))'$

D'une manière analogue on définit la dérivée d'ordre n de f on la note $f^{(n)}(x)$ et on a :

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

Définition :
La fonction f est dite de classe $C^{(n)}$ (I) si la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f existe et de plus continue sur I.
Exemples :

$$y = \sin x, x \in IR, y^{(n)} = ?$$
$$y' = \cos x = \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$y'' = -\sin x = \sin(x + \pi) = \sin\left(x + 2\tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\tfrac{\pi}{2}\right), \text{(preuve par récurrence)}$$

Formule de Leibniz :

Soient f, g deux fonctions n fois dérivables en x alors

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

Démonstration : (par récurrence)
Pour $n = 1$

$$(f.g)'(x) = \sum_{k=0}^{1} C_1^k f^{(1-k)}(x) g^{(k)}(x) = C_0^{\,1} f'(x)g(x) + C_1^{\,1} f(x)g'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Donc P(1) est vraie.

On suppose que P(n) est vraie et on démontre P(n + 1)

$$(f.g)^{(n+1)} = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)\right)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[f^{(n-k+1)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x) g^{(k+1)}(x)\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k+1)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x) g^{(k+1)}(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(n-k+1)}(x) g^{(k)}(x) + C_n^0 f^{(n+1)}(x) g(x) + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(n-k+1)}(x) g^{(k)}(x) + C_n^n f(x) g^{(n+1)}(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(C_n^k + C_n^{k-1}\right)}_{=C_{n+1}^k} f^{(n-k+1)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(n+1)}(x) g(x) + f(x) g^{(n+1)}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

D'où la proposition P(n + 1).
Exemple :
Calculer $\left(x^3 \cos 4x\right)^{(4)}$

$$\left(x^3 \cos 4x\right)^{(4)} = \sum_{k=0}^{4} C_4^k \left(\cos 4x\right)^{(4-k)} \left(x^3\right)^{(k)}$$

$$= C_4^0\left(\cos 4x\right)^{(4)}\left(x^3\right) + C_4^1\left(\cos 4x\right)^{(3)}\left(x^3\right)' + C_4^2\left(\cos 4x\right)^{(2)}\left(x^3\right)^{(2)} + C_4^3\left(\cos 4x\right)'\left(x^3\right)^{(3)} + C_4^4\left(\cos 4x\right)\left(x^3\right)^{(4)}$$

$$= 4^4 x^3 \cos 4x - C_4^1 4^3.3x^2 \sin 4x + C_4^2 4^2.6x \cos 4x - C_4^3.24.\sin 4x + C_4^4 \cos 4x.0$$

Différentielles d'ordres supérieures :

Soit f une fonction dérivable sur un ensemble X alors elle est différentielle sue X et de plus on a :

$$df(x) = f'(x)dx$$

C'est la différentielle de f d'ordre 1.

Si f' est dérivable sur X alors $df(x)$ est différentiable sur X et on a :

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)' dx = (f'(x))' dx.dx = f''(x)dx^2$$

C'est la différentielle de f d'ordre 2.

De façon analogue, si f est n fois dérivable sur X alors elle est n fois différentiable sur X et on a :

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables :

Théorème de Rolle :

Soit f une fonction vérifiant :

1. Définie et continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$
2. Dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$
3. $f(a) = f(b)$

Alors il existe un point c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Démonstration :

On a f atteint ses bornes supérieure et inférieure sur $[a, b]$ (l'une de ces bornes est au moins dans $[a, b]$) soit

$$\sup_{[a,b]} f(x) = f(c); \quad c \in [a,b]$$

Ce qui nous donne :

$$\forall \Delta x > 0 \quad (\text{où} \quad \Delta x < 0); \quad f(c+\Delta x) \leq f(c)$$

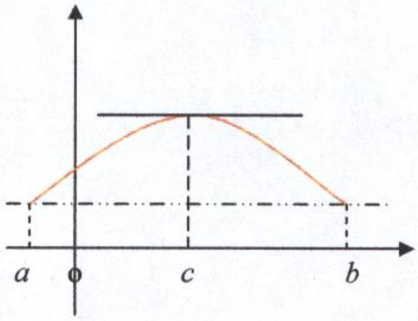
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0 \quad \text{si} \quad \Delta x < 0 \\ \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \quad \text{si} \quad \Delta x > 0 \end{cases}$$

On passe à la limite lorsque $\Delta x \to 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x < 0)}} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0 \Rightarrow f'(c) \geq 0 \\ \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x > 0)}} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \Rightarrow f'(c) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(c) = 0$$

Sens géométrique :



Remarque :

Toutes les conditions du théorème de Rolle sont nécessaires.

Théorème de Lagrange (accroissement finis) :

Soit f une fonction vérifiant :

1. Définie et continue sur $[a, b]$
2. Dérivable sur $]a, b[$

Alors il existe un point c de $]a, b[$ tel que : $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$

Démonstration :

Considérons la fonction :

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

La fonction $g(x)$ est :

1. Continue sur $[a, b]$ car composée des fonctions continues
2. Dérivable sur $]a, b[$
3. $g(a)=0$; $g(b)=0$

Alors d'après le théorème de Rolle il existe un point c de $]a, b[$ tel que : $g'(c)=0$

Or :

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Donc

$$g'(c)=0 \quad \Rightarrow \quad f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \quad \Rightarrow \quad f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

Théorème de Cauchy :

Soient deux fonctions f, g vérifient :

1. Définies et continues sur $[a, b]$
2. Dérivables sur $]a, b[$
3. $g'(x)\neq 0$, $\forall x \in]a, b[$

Alors il existe c dans $]a, b[$ tel que :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Démonstration :

Considérons la fonction $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$

Il est clair que la fonction F vérifie les conditions du théorème de Rolle et donc il existe un point c de $]a, b[$ tel que $F'(c) = 0$

Or :

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} . g'(x)$$

$$F'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} . g'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Dérivée d'une fonction implicite :

Soit une fonction implicite $y = f(x)$ donnée par l'équation $F(x, y) = 0$

C'est – à – dire $F(x, f(x)) = 0, \quad \forall\, x \in\,]a, b[$

Dérivée d'une fonction donnée sous forme paramétrique :

Soit $y = f(x)$ tels que $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \phi(t) \end{cases} \quad t_0 \le t \le T$

Supposons que φ et ϕ sont dérivables dans $]\, t_0, T\, [$ et que $t = \theta(x)$, (θ l'inverse de φ)

Alors $y = \phi(t) = \phi(\theta(x))$

Ainsi et d'après la dérivée d'une fonction composée on obtient :

$$y'_t = y'_x\, t'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Exemple :

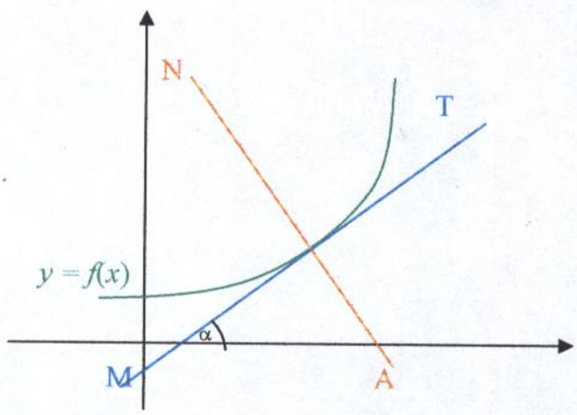
Soit $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ alors :

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\cos t}{a\sin t} = \cot t; \quad t \ne k\pi$$

Equation de la tangente et de la normale pour une courbe donnée :

Soit une fonction $y = f(x)$, $x \in I$ avec la courbe représentative C et soit $M_0(x_0, y_0) \in C$.

On demande d'écrire les équations de la tangente et de la normale à la courbe C au point $M_0(x_0, y_0)$



L'équation de la tangente passant par le point $M_0(x_0, y_0)$ s'écrit sous la forme :

$y - y_0 = k(x - x_0)$; $\quad y_0 = f(x_0)$ et $k = \tan\alpha = f'(x_0)$

D'où : $\quad y_T = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Equation de la normale :

Elle est de la forme $y_N = k_1(x - x_0) + y_0$

$MT \perp NA \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{k}$

Donc : $y_N = -\frac{1}{f'(x)}(x - x_0) + f(x_0)$

Limite du rapport de deux infinement petites :

Première règle de l'Hospital :

Théorème :

Soient deux fonctions f, g définies, dérivables dans un voisinage pointé $V^0(x_0)$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$
2. $g'(x) \neq 0$ sur $V^0(x_0)$

S'il $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ alors $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ et on a : $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Démonstration :

La condition 1 implique que f et g sont prolongeables en x_0 et de plus $f(x_0) = g(x_0) = 0$

Soit x un point arbitraire de $V^0(x_0)$ alors f, g vérifient les conditions du théorème de Cauchy sur l'intervalle $[x_1, x]$, c'est-à-dire :

$\exists c \in [x_0, x];$

$$\frac{f(x) - \underbrace{f(x_0)}_{=0}}{g(x) - \underbrace{g(x_0)}_{=0}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)}}_{\text{cte ne dépend pas de } x} = l$$

Remarque :

Le théorème de l'Hospital est vrai s'il existe $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ car des fois $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe tandis que $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'existe pas.

Exemple :

$f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}, \quad g(x) = x; \quad x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos\frac{1}{x}}{x} == \lim_{x\to 0} x \cos\frac{1}{x} = 0$$

&

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}}{1} \text{ n'existe pas!}$$

Remarque 2 :

La règle de l'Hospital reste valable lorsque $x \to \infty$ et ceci car :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Remarque 3 :

Si $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{0}{0}$ et les fonction $f'(x)$, $g'(x)$ vérifient les conditions de la règle de l'Hospital alors on peut appliquer de nouveau la règle de l'Hospital.

Limite du rapport de deux fonctions infinement grandes :

2ème règle de l'Hospital :

Théorème 2 :

Soient deux fonctions f, g définies, dérivables dans un voisinage pointé $V^0(x_0)$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$
2. $g'(x)\neq 0$ sur $V^0(x_0)$

S'il $\exists$ $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ alors $\exists$ $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ et on a : $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l$

Les remarques 1 – 3 restent vraies pour le théorème 2.

Exemple :

Calculer $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!\,x^0}{e^x}=0$$

<u>Autres formes indéterminées :</u>

« $0.\infty$ », « $+\infty-\infty$ », « 1^∞ », « ∞^0 », « 0^0 ».

1. Si $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ et $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ alors : $\lim_{x\to x_0}[f(x).g(x)]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right)$

2. Si $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ et $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ alors :

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

3. Si $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$ et $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ alors en posant $y=(f(x))^{g(x)}$ on obtient :

$\ln y(x)=g(x)\ln f(x)$

$\lim_{x\to x_0}(\ln y(x))=\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)=l$ de la forme $(\infty.0)$

$\ln\left(\lim_{x\to x_0} y(x)\right)=l\Rightarrow\lim_{x\to x_0} y(x)=e^l$

4. Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$ alors en posant $y=(f(x))^{g(x)}$ on obtient une limite de la forme $(\infty\ .\ 0)$ cité dans le 1^er cas.

5. Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ alors en posant $y=(f(x))^{g(x)}$ on tombe sur une limite de la forme 1.

Critère de monotonie d'une fonction réelle :

Théorème :

Soit f une fonction de $I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I alors les équivalences suivantes sont vraies :

1. $f' \geq 0$ sur I $\Leftrightarrow f$ est croissante sur I
2. $f' \leq 0$ sur I $\Leftrightarrow f$ est décroissante sur I

Démonstration :

« $\Rightarrow$ » Supposons que f croissante sur I et démontrons que $f' \geq 0$

En effet ;

Soit x_0 un point arbitraire de I alors $\forall\ h \in \mathbb{R}^*_+$ on a :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$$

« $\Leftarrow$ » Supposons que $f' \geq 0,\ \forall\ x \in I$ et démontrons que f croissante

Soient x_1, x_2 deux points arbitraires de I tels que $x_1 < x_2$

Le théorème de Lagrange sur $[x_1, x_2]$ donne l'existence dans point c de $[x_1, x_2]$ vérifiant :

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(c)$$

$$f'(c) \geq 0 \quad \text{et} \quad (x_2-x_1) \geq 0 \Rightarrow f'(c)(x_2-x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_2)-f(x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

D'où f est croissante sur I.

<u>Application :</u>

Montrer que $\tan x > x + \dfrac{x^3}{3} \quad \forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

Posons $y = \tan x - \left(x + \dfrac{x^3}{3}\right)$

$y(0)=0$

$$y'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-(1+x^2)=1+\tan^2 x-1-x^2=\tan^2 x - x^2 > 0;\quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow y(x) \quad \text{croissante}$$

D'où : $\tan x - \left(x - \dfrac{x^3}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow \tan x > x - \dfrac{x^3}{3}$

Extremums :

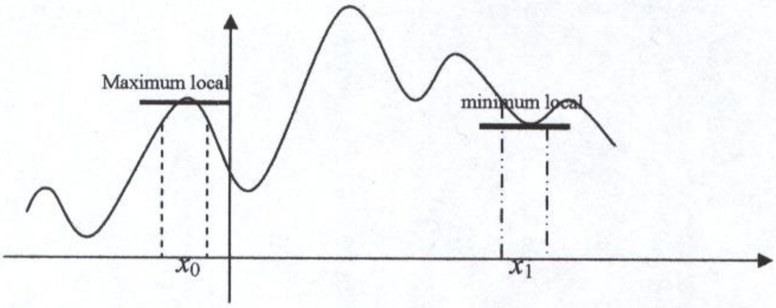
Soit f une fonction définie sur I, $x_0 \in I$

Définition :

On dit que f admet un maximum local (resp. Minimum local) au point x_0 s'il existe un voisinage V du point x_0 tel que :

$\forall x \in V, \quad f(x) \leq f(x_0)$; $\quad$ [resp. $\quad f(x) \geq f(x_0)$]

« max f » et « min f » sont dites extremums de la fonction f.



Définition 2 :

On dit que f admet un maximum absolu (resp. Minimum absolu) au point x_0 de I si

$\forall x \in I, \quad f(x) \leq f(x_0)$; $\quad$ [resp. $\quad f(x) \geq f(x_0)$]

Condition nécessaire d'un extremum :

Théorème :

Si f admet un extremum en x_0 et elle est dérivable en ce point alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration :

Analogue à celle du théorème de Rolle.

Remarque :

Ce théorème n'est pas suffisant pour l'existence d'un extremum.

Exemple :

La fonction $y = x^3$ n'a pas d'extremum en $x_0 = 0$ alors que $y'(0) = 0$.

Remarque 2 :

Une fonction f peut admettre un extremum en un point x_0 sans qu'elle soit dérivable en ce point.

Exemple :

La fonction $y = |x|$ n'est pas dérivable en $x_0 = 0$ mais elle admet un minimum en ce point.

Les points où f' s'annule ou bien n'existent pas sont dits points critiques de f.

Première condition suffisante :

Soit f définie et continue dans un voisinage V de point x_0 dérivable dans ce voisinage sauf peut être en x_0

Si la dérivée f' prend des signes différentes à gauche et à droite de point x_0 alors f admet un extremum en ce point.

De plus :

$$\begin{cases} f' > 0 \quad \text{si} \quad x < x_0 \quad \text{et} \quad f' < 0 \quad \text{si} \quad x > x_0 \Rightarrow x_0 \quad \text{est un point maximum de } f \\ f' < 0 \quad \text{si} \quad x < x_0 \quad \text{et} \quad f' > 0 \quad \text{si} \quad x > x_0 \Rightarrow x_0 \quad \text{est un point minimum de } f \end{cases}$$

Démonstration :

Supposons que $f' > 0$ si $x < x_0$ et $f' < 0$ si $x > x_0$ et montrons que x_0 est un maximum de f

D'après le théorème de Lagrange il existe un point c tel que :

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)f'(c)$$

Si $x<x_0$, $f'(c)>0$ et $(x-x_0)<0$ alors $f'(c)(x-x_0)<0 \Rightarrow f(x)<f(x_0)$

Si $x>x_0$, $f'(c)<0$ et $(x-x_0)>0$ alors $f'(c)(x-x_0)<0 \Rightarrow f(x)<f(x_0)$

D'où x_0 est un point maximum de f

Exemple :

Déterminer les extremums de $y=3x^2-10x+5$

On a :

$$y'(x)=0 \Leftrightarrow 6x-10=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$$

Et

$$y' : \quad \begin{array}{ccc} - & \big| & + \\ \hline & \frac{5}{3} & \end{array}$$

Deuxième condition suffisante :

Soit f une fonction deux fois dérivable au point x_0 et $f'(x_0)=0$ alors :

Si $f''(x_0)<0$ alors x_0 est un maximum de f

Si $f''(x_0)>0$ alors x_0 est un minimum de f

Démonstration :

On suppose que $f'(x_0)=0$ & $f''(x_0)<0$ et démontrons que x_0 est un point max

En effet :

$f''(x_0)<0 \Rightarrow (f')'(x_0)<0 \Rightarrow f$ décroissante au voisinage de point x_0

D'autre part $f'(x_0)=0$ alors :

$$\left.\begin{array}{l} f'>0 \quad \text{si} \quad x<x_0 \\ f'<0 \quad \text{si} \quad x>x_0 \end{array}\right\} \overset{1^{ère}\ \text{cond. suffi.}}{\Longrightarrow} \quad x_0 \text{ est un point max de } f$$

Remarque :

Si $f'(x_0)=0$ & $f''(x_0)=0$ on ne peut rien dire.

Troisième condition suffisante :

Soit f une fonction n fois dérivable en $x = x_0$

Si $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ & $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ alors :

1. Lorsque n est un nombre pair la fonction f admet un extremum en x_0 et de plus :

   $a) f^{(n)}(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ un maximum

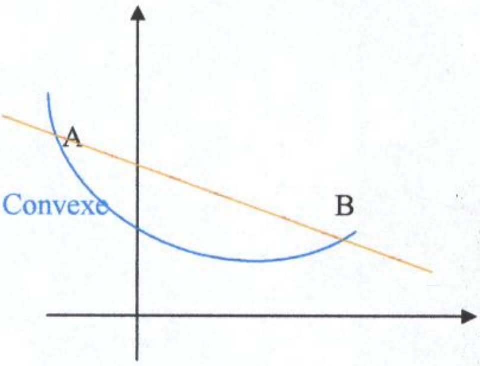
   $b) f^{(n)}(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ un minimum

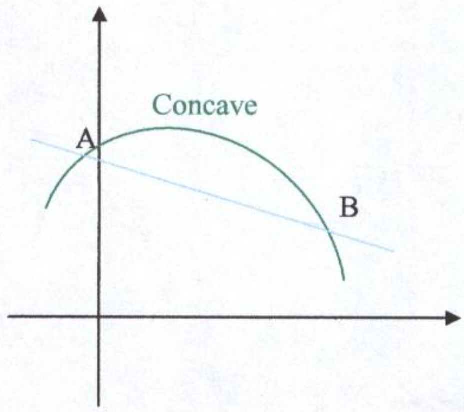
2. Quand n est impair la fonction f n'admet pas d'extremum

Convexité – concavité :

Définition 1 :

La fonction $f:\ \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ avec la courbe représentative est dite convexe (resp. concave) sur l'intervalle I si toute corde passant par les points arbitraire de C se trouve au dessus de l'arc $\breve{A}\breve{B}$ (resp. au dessous de AB) de cette courbe.





Définition 2 :

La fonction $f:\ \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ avec la courbe représentative est dite convexe (resp. concave) sur l'intervalle I si :

$\forall x_1, x_2 \in I, \quad \forall q_1 > 0, \quad q_2 > 0$ avec $q_1 + q_2 = 1$ on a

$f(q_1x_1 + q_2x_2) \leq q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$, [resp. $f(q_1x_1 + q_2x_2) \leq q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$]

Définition 3 :

La fonction $f:\ \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ avec la courbe représentative est dite convexe (resp. concave) sur l'intervalle I si toute tangente à la courbe C au point d'abscisse x_0 de I se trouve au dessus de la courbe (resp. au dessous de la courbe)

Théorème :

Si $f: \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I alors les équivalences suivantes sont vraies :

1. f convexe sur I $\Leftrightarrow$ $f'' \geq 0$ sur I
2. f concave sur I $\Leftrightarrow$ $f'' \leq 0$ sur I

Démonstration :

Soit $f:\ \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I et x_0 un point arbitraire de I,

L'équation de la tangente à la courbe au point x_0 est donnée par $y_T = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

L'équation de la courbe est $y = f(x)$

On a :

$$y - y_T = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \underset{\text{th de Lagrange}}{=} f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0); \quad (x < c < x_0)$$
$$= [f'(c) - f'(x_0)](x - x_0) \underset{\text{th de Lagrange}}{=} f''(\varepsilon)(c - x_0)(x - x_0); \quad (c < \varepsilon < x_0)$$

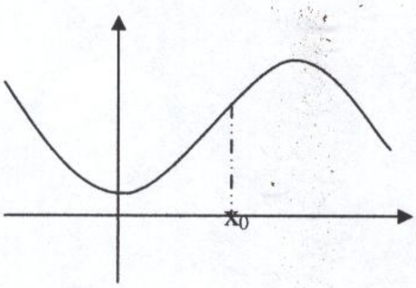
Le signe de $(y - y_T)$ est celui de $f''(\varepsilon)$ car $(\varepsilon - x_0)(x - x_0) > 0$.

Points d'inflexions :

Définition :

Soit f: $I \to \mathbb{R}$ avec la courbe représentative C,

Le point $M_0(x_0, y_0)$ est dit point d'inflexion de la courbe C en x_0 si la courbe C est convexe dans une coté de x_0 et concave de l'autre coté.



Condition nécessaire :

Si f est deux fois dérivable en x_0 et f admet un point d'inflexion en x_0 alors $f''(x_0) = 0$

Condition suffisante :

Soit f deux fois dérivable au voisinage du point x_0 sauf peut être en x_0

Si f prend des signes différents à gauche et à droite du point x_0 alors elle admet un point d'inflexion en x_0

Asymptotes :

Soit f: $I \to \mathbb{R}$ avec la courbe représentative C,

Définition 1 :

La droite $x = x_0$ est dite asymptote verticale de la courbe C si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Exemple :

La droite $x = 0$ est une asymptote de la courbe $y = \log x$

Définition 2 :

La droite $y = y_0$ est dite asymptote horizontale de la courbe C si $\lim_{x \to \infty} f(x) = y_0$

Exemple :

La droite $y = \dfrac{\pi}{2}$ est une asymptote de la courbe $y = \arctan x$

Définition 3 :

La droite $y = kx + b$ est dite asymptote oblique de la courbe C s'il existe une fonction $h = h(x)$ tel que $f(x) = kx + b + h(x)$ et $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$

Et on a :

$$f(x) = kx + b + h(x) \Rightarrow k = \frac{f(x)}{x} - \frac{b}{x} - \frac{h(x)}{x}$$

En passant à la limite quand x tend vers l'infini on obtient :

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx]$$

Schéma général du tracé d'une courbe :

L'étude des fonctions en générale se ramène à déterminer

1. Le domaine de définition de la fonction
2. Les points de discontinuité de la fonction
3. Les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction
4. Les points d'extremums ainsi que les valeurs maximale et minimale de la fonction
5. Le domaine de convexité et de concavité ainsi que les point d'inflexions
6. Les asymptotes graphiques de la fonction.
