

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF

FACULTES DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

MASTER I CONSTRUCTION

COURS MECANIQUE DES FLUIDES APPROFONDIES

MECANIQUE DES FLUIDES APPROFONDIES

Prof. HEBICHE NOUREDDINE ANWAR

Mécanique des fluides approfondies

Table des matières

1. Généralités

1.1. Description du fluide en mouvement

1.2. Dérivation suivant la méthode d'Euler

1.3. Equation de continuité (ou de conservation de la masse)

1.4. Écoulement laminaire et turbulent

1.5. Notion de viscosité dans un fluide en mouvement

2. Cinématique des fluides

2.1. Champ de vitesses dans un fluide

2.2. Exemple de compréhension

2.3. Étude des différents types de champ de vitesses

3. Dynamique des fluides

3.1. Equation de Navier. Equation de Navier-Stokes. Equation d'Euler

3.1.1. Equation de Navier - Stokes pour les fluides parfaits (équation d'Euler)

3.1.2. Equation de Navier - Stokes pour les fluides incompressibles

3.2. Equation d'Euler et théorème de Bernoulli

3.3. Bilans énergétiques pour les écoulements permanents

3.4. Théorème d'Euler. Bilan de quantité de mouvement et de moment cinétique dans un écoulement permanent

1. Généralités

1.1. Description d'un fluide en mouvement

Décrire le mouvement d'un fluide fait appel à des notions différentes de celles développées en Mécanique du point ou du solide. Le mouvement d'un fluide est un **écoulement** où il y a déformation continue du fluide

On peut, de manière analogue à ce que l'on fait en Mécanique du solide, isoler (par la pensée ou en trouvant un moyen de visualisation, coloration par exemple) une partie restreinte du fluide appelée **particule** et la " suivre " au cours du temps c'est à dire connaître à chaque instant sa position.

Cette position sera connue, par exemple, par ses coordonnées cartésiennes

$$x_p(t, x_{0p}, y_{0p}, z_{0p}), y_p(t, x_{0p}, y_{0p}, z_{0p}) \text{ et } z_p(t, x_{0p}, y_{0p}, z_{0p}) \text{ où}$$

x_{0p}, y_{0p}, z_{0p} représentent les coordonnées de la particule choisie à l'instant t_0 , la **vitesse** de

la particule aura pour composantes $v_x = \frac{\partial x_p}{\partial t}$, $v_y = \frac{\partial y_p}{\partial t}$ et $v_z = \frac{\partial z_p}{\partial t}$. Au cours du temps, la particule sera en différents points M , l'ensemble des points M constitue la **trajectoire** de la particule.

Cette façon de faire est appelée **méthode de Lagrange**, les variables introduites sont appelées **variables de Lagrange**.

La méthode de Lagrange s'avère dans la plupart des cas délicate car il n'est pas facile de suivre les particules : elle est peu employée.

La **méthode d'Euler** consiste à connaître la vitesse des particules au cours du temps t à un endroit donné déterminé par ses coordonnées, par exemple cartésiennes x, y, z . Elle est plus employée que la méthode de Lagrange, la connaissance du champ des vitesses étant suffisante pour la description du fluide en mouvement.

Les composantes du vecteur vitesse \vec{v} sont des fonctions des variables (x, y, z, t) , ainsi $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$ où $v_x = v_x(x, y, z, t)$, $v_y = v_y(x, y, z, t)$ et $v_z = v_z(x, y, z, t)$

L'écoulement du fluide est **permanent** ou **stationnaire** si ses composantes de vitesse sont indépendantes de la variable temps t ; il est dit **non-permanent** ou **instationnaire** si cette condition n'est pas réalisée.

L'écoulement du fluide est **uniforme** si ses composantes de vitesse sont indépendantes des coordonnées d'espace ; il est **non-uniforme** si cette condition n'est pas remplie.

Remarque : Dans la méthode d'Euler, l'accélération d'une particule peut être due, bien sur, au caractère instationnaire de l'écoulement mais aussi à sa non-uniformité. Ainsi, chacun a pu constater, dans l'écoulement permanent d'une rivière, l'accélération des particules lors du franchissement d'un rétrécissement.

On appelle **ligne de courant** une courbe dont la direction tangente en chacun de ses points est la direction du vecteur vitesse. L'équation d'une ligne de courant se calcule par intégration

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

des équations

Un **tube de courant** est un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé. On appelle **ligne d'émission** une courbe constituée par l'ensemble des points atteints à un instant donné par des particules passées antérieurement en un même point. Trajectoire, ligne de courant et ligne d'émission sont confondues pour un écoulement permanent.

1.2. Dérivation suivant la méthode d'Euler

Considérons la fonction scalaire $Q(x, y, z, t)$ rendant compte d'une grandeur physique caractéristique du fluide au point de coordonnées x, y, z et au temps t .

La particule fluide au temps $t + dt$ sera au point de coordonnées $x + v_x dt, y + v_y dt, z + v_z dt$.

La variation de la fonction Q sera donc égale à :

$$dQ = Q(x + v_x dt, y + v_y dt, z + v_z dt, t + dt) - Q(x, y, z, t) = \frac{\partial Q}{\partial x} v_x dt + \frac{\partial Q}{\partial y} v_y dt + \frac{\partial Q}{\partial z} v_z dt + \frac{\partial Q}{\partial t} dt$$

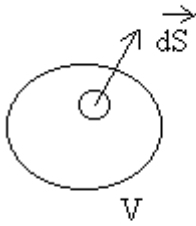
La dérivée $\frac{dQ}{dt}$, que l'on note $\frac{DQ}{dt}$ et que l'on appelle **dérivée particulaire**, est égale à :

$$\frac{DQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x} v_x + \frac{\partial Q}{\partial y} v_y + \frac{\partial Q}{\partial z} v_z + \frac{\partial Q}{\partial t} = \vec{v} \cdot \text{grad} Q + \frac{\partial Q}{\partial t}$$

Cette dérivée apparaît comme la somme de deux termes :

- le premier, qualifié de **convectif** ou **advectif**, est du à la non-uniformité de l'écoulement,
- le second, qualifié de **temporel**, est du au caractère instationnaire de l'écoulement.

1.3. Equation de continuité (ou de conservation de la masse)



Soit une partie d'un fluide de masse volumique μ délimitée par une surface fermée S_f (de volume V).

Soit \vec{dS} un vecteur élémentaire de cette surface, orienté vers l'extérieur à la surface fermée.

La partie de fluide a une masse $m = \iiint_V \mu dV$, le débit massique

sortant de la surface S_f est égal à $\oiint_{S_f} \mu \vec{v} \cdot \vec{dS}$.

La conservation de la masse s'écrit $\frac{dm_s}{dt} - \oiint_{S_f} \mu \vec{v} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \frac{\partial \mu}{\partial t} dV$ où $\frac{dm_s}{dt}$ représente le débit massique de fluide interne au volume considéré, compté positivement s'il s'agit d'une source et négativement s'il s'agit d'un puits.

Compte tenu du théorème d'Ostrogradsky $\oiint_{S_f} \mu \vec{v} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \text{div}(\mu \vec{v}) dV$, l'équation de

conservation de la masse peut être écrite $\frac{dm_s}{dt} = \iiint_V [\text{div}(\mu \vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t}] dV$

Remarque :

Sauf précision contraire, nous appliquerons l'équation de conservation de masse en absence

de source ou de puits, soit $\text{div}(\mu \vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$.

Deux cas particuliers sont alors à considérer.

Le **cas 1** du fluide **incompressible** ($\mu = \text{cte}$) $\delta \text{div} \vec{v} = 0$ pour un écoulement **stationnaire** ou **instationnaire**.

Cet écoulement est dit **isovolume**.

Le **cas 2** d'un écoulement **stationnaire** ($\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$) $\delta \text{div}(\mu \vec{v}) = 0 = \mu \text{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \text{grad} \mu$

En dehors de la possibilité **cas 1**, il existe la possibilité d'écoulements **isovolumes** tels que $\vec{v} \cdot \text{grad} \mu = 0$ où les variations de masse volumique sont orthogonales, en tout point, au vecteur vitesse.

Ce cas correspond à des écoulements **stratifiés** par salinité ou température (courants marins), par température et humidité (atmosphère).

1.4. Écoulements laminaire et turbulent

L'introduction de marqueurs (fumée dans le cas des gaz, colorant pour les liquides), permet d'observer des différences importantes dans le comportement des écoulements des fluides.

Dans certains écoulements, les particules marquées diffusent très lentement c'est à dire s'écartent peu les unes des autres, les différentes couches (lamelles) glissent les unes par rapport les autres sans se mélanger : l'écoulement est dit **laminaire**.

Au contraire dans d'autres écoulements les particules marquées s'éloignent très rapidement de manière " aléatoire, irrégulière, dans toutes les directions " les unes des autres, on ne retrouve plus de trace de marquage significative très près de l'endroit où le marqueur a été introduit : l'écoulement est dit **turbulent**.

D'évidence, l'écoulement sera laminaire à faible vitesse alors que les grandes vitesses provoqueront l'instabilité des particules c'est à dire le caractère turbulent de l'écoulement. En fait, la transition entre écoulement laminaire et turbulent dépend de la vitesse, mais aussi des caractéristiques (viscosité) du fluide, de la forme de l'écoulement (espace fermé – canalisation- ; espace ouvert –sur une surface à " l'air libre "-).

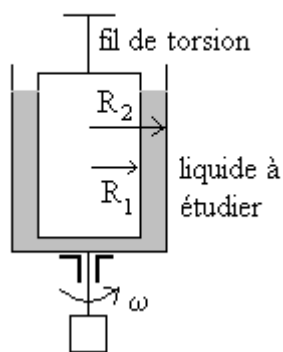
Il découle de ces propos que, pour un écoulement turbulent, les variables, en un point donné, qui caractérisent l'écoulement varient de manière aléatoire et que la notion d'écoulement permanent ne peut être comprise qu'en moyenne (la valeur moyenne de toute variable caractéristique de l'écoulement étant, alors, indépendante du temps).

Au contraire, pour un écoulement laminaire, les fluctuations des variables sont négligeables, à la limite nulles.

1.5. Notion de viscosité dans un fluide en mouvement

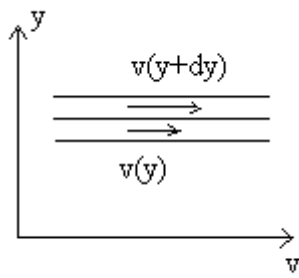
L'expérience montre que, lors d'un écoulement d'un fluide, la pression (force normale) ne suffit pas à expliquer les phénomènes et qu'il convient d'introduire des forces tangentielles qui s'opposent au mouvement du fluide. Ces forces, de type frottement, dues aux interactions entre molécules du fluide, sont appelées **forces de viscosité**.

Expérience de Couette



On constate que lorsque le cavité cylindrique extérieure est mis en rotation à vitesse ω , le cylindre intérieur tourne d'un angle θ par rapport à sa position d'équilibre. Le fil de torsion exerce un couple de rappel $-C\theta$ qui équilibre des efforts tangentiels au cylindre. La notion de pression ne suffit pas pour rendre compte du système de forces.

Pour les liquides purs de faible masse molaire ou les solutions peu concentrées, le couple est proportionnel à la vitesse de rotation et inversement proportionnel à l'épaisseur $e = R_2 - R_1$ si $e \ll R_1, R_2$.



Entre deux couches successives de fluides à vitesses $v(y)$ et $v(y + dy)$, on introduit des forces parallèles à l'écoulement qui accélèrent la couche la plus lente et ralentissent la couche la plus rapide.

On appelle **fluides newtoniens**, les fluides pour lesquelles ces

forces obéissent à la loi générale :
$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}$$

τ (force par unité de surface dans le plan tangent à deux couches successives) est appelée contrainte tangentielle et η viscosité dynamique qui, dans le système MKSA s'exprime $N.s.m^{-2}$ ou $Pa.s$ (appelé *poiseuille*).

Si nous supposons $v(y + dy) > v(y)$, la couche de fluide située en $y + dy$ "tire" sur la couche de fluide en y avec la contrainte τ . Evidemment, la couche en $y + dy$ est retenue par une contrainte $-\tau$.

Dans l'expérience Couette la contrainte est égale à :
$$\tau \approx \eta \frac{\omega R_2}{e}$$

On trouvera, dans le tableau ci-après, quelques valeurs de la viscosité à $15^\circ C$.

Ether	$2,510^{-4}$	Mercure	1610^{-4}
Chloroforme	$6,510^{-4}$	Kérosène	$18,310^{-4}$
Benzène	710^{-4}	Glycérine	13010^{-4}
Eau	$11,410^{-4}$	Huile de ricin	13410^{-4}
Alcool	1310^{-4}		

Pour tous les liquides, la viscosité diminue lorsque la température augmente.

Pour des liquides purs, on utilise la loi empirique $\eta = A \exp(B/T)$, pour des mélanges $\eta = A[1 + \exp(-bT)] \exp(BT)$.

Dans le cas des huiles multigrades, les coefficients b et B sont tels que η est à peu près la même valeur à basse et haute températures.

Pour les gaz, la viscosité est beaucoup plus faible et varie avec la température suivant la loi

$$\eta = \frac{CT^{3/2}}{T + D}$$

Dans le cas de fluides **non-newtoniens**, il n'y a pas proportionnalité entre la contrainte tangentielle et le gradient de vitesse. C'est le cas des solutions de polymères, des purées de

légumes, des gels, des boues, des pâtes, du sang, des peintures, ..L'étude de ces fluides relève de la **rhéologie**.

Un fluide est dit **non-visqueux** (ou **parfait**) si l'on peut négliger les contraintes tangentielles.

2. Cinématique des fluides

2.1. Champ de vitesses d'un fluide

Au cours du mouvement, une particule de fluide subit des changements de position, d'orientation et de forme. Nous considérons deux points voisins d'un même fluide

$M(x, y, z)$ et $M'(x+h, y+k, z+l)$ et leurs vitesses respectives soient $\vec{v}(M)$ et $\vec{v}'(M')$ à un instant t .

$$v'_x = v_x(x+h, y+k, z+l) = v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}h + \frac{\partial v_x}{\partial y}k + \frac{\partial v_x}{\partial z}l$$

$$v'_y = v_y(x+h, y+k, z+l) = v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x}h + \frac{\partial v_y}{\partial y}k + \frac{\partial v_y}{\partial z}l$$

$$v'_z = v_z(x+h, y+k, z+l) = v_z + \frac{\partial v_z}{\partial x}h + \frac{\partial v_z}{\partial y}k + \frac{\partial v_z}{\partial z}l$$

Ces expressions peuvent être écrites,

$$v'_x = v_x + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) l - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) k \right] + d_x \quad \text{où}$$

$$d_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) l$$

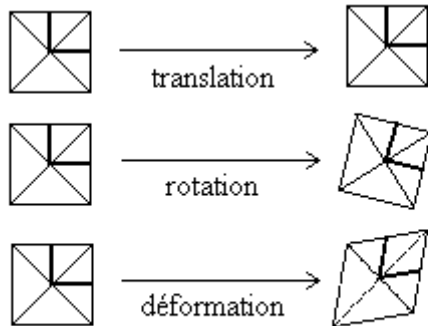
$$v'_y = v_y + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) h - \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) l \right] + d_y \quad \text{où}$$

$$d_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) h + \frac{\partial v_y}{\partial y}k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) l$$

$$v'_z = v_z + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) k - \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) h \right] + d_z \quad \text{où}$$

$$d_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) k + \frac{\partial v_z}{\partial z}l$$

soit $\vec{v}'(M') = \vec{v}(M) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{MM'} + \vec{D}$ où $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot } v}$ est le vecteur **tourbillon** et $\vec{D} = d_x \vec{e}_x + d_y \vec{e}_y + d_z \vec{e}_z$ est la **vitesse de déformation**.



D'une manière générale, le mouvement d'une particule fluide est la superposition d'une translation, d'une rotation et d'une déformation.

Ces résultats peuvent être présentés sous forme tensorielle. On introduit alors le tenseur rotation et le tenseur déformation.

$$\left[\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{MM'} \right] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} h \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

Tenseur rotation (antisymétrique)

$$\left[\vec{D} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} h \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

Tenseur déformation (symétrique)

2.2. Exemples de compréhension

La notion de translation ne pose pas de difficulté : il suffit de se représenter l'écoulement d'une rivière " paisible ".

Les notions de rotation (appréhendée en Mécanique du solide) et de déformation méritent

attention.

Certains écoulements présentent des lignes de courant fermées " circulaires en première approximation " de type " tourbillonnaire ".

Nous pensons aux tourbillons qui se forment dans le sillage d'un objet solide en mouvement relatif par rapport à un fluide, à la vidange d'un réservoir (baignoire, lavabo) par un siphon, aux tornades ou cyclones.

En s'écartant du centre du tourbillon, la vitesse radiale des particules peut être croissante ou décroissante. Souvent la vitesse est croissante près du centre puis décroissante.

Nous envisageons les deux cas.

a) L'intensité de vitesse est croissante de type $\vec{v} = \omega r \vec{e}_\theta = \omega(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y)$

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} = \omega \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{D} = 0$$

Le calcul montre que :

La particule fluide est en rotation pure et ne se déforme pas (le mouvement est analogue à celui d'un solide en rotation).

$$\vec{v} = \frac{K}{r} \vec{e}_\theta = K \frac{-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y}{x^2 + y^2}$$

b) L'intensité de vitesse est décroissante de type

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} = 0 \quad \text{et}$$

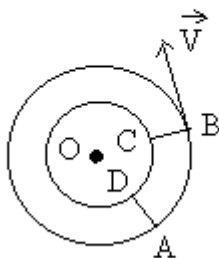
Le calcul montre que :

$$\vec{D} = \frac{K}{(x^2 + y^2)^2} \left\{ [2xyh + (y^2 - x^2)k] \vec{e}_x + [(y^2 - x^2)h - 2xyk] \vec{e}_y \right\}$$

La particule fluide n'a pas de rotation, son mouvement provoque sa déformation angulaire.

2.3. Etude des différents types de champ de vitesses

2.3.1. Notion de circulation



Par définition, la circulation du vecteur vitesse suivant une courbe

$$\Gamma = \int_{(C)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{(C)} v_x dx + v_y dy + v_z dz$$

est égale à

Pour une courbe fermée,

$$\Gamma = \oint_{(C)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{dS} = 2 \iint_S \vec{\Omega} \cdot \vec{dS}$$

où S est une surface quelconque s'appuyant sur le contour (C) [Stokes].

A titre d'exemple, nous reprenons les deux cas étudiés en 2.2.

a) $\vec{v} = \omega r \vec{e}_\theta$

La circulation suivant un cercle de rayon R_1 est égale à $\Gamma_1 = 2\pi \omega R_1^2$, elle dépend du cercle choisi, plus généralement de la courbe fermée entourant le point O.

La circulation suivant le contour ABCD d'ouverture d'angle α est égale à

$\Gamma = \omega \alpha (R_2^2 - R_1^2)$. Cette valeur est non nulle et nous avons trouvé un vecteur tourbillon

non nul ($\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} = \omega \vec{e}_z$)

$v = \frac{K}{r}$

b) Reprenons le même exemple avec une intensité de vitesse $v = \frac{K}{r}$.

La circulation suivant un cercle de rayon R_1 est égale à $\Gamma_1 = 2\pi K$, elle est la même quelque soit le cercle ou la courbe fermée entourant le point O.

La circulation suivant le contour ABCD d'ouverture d'angle α est nulle, elle est nulle quelque soit la courbe fermée n'entourant pas le point O.

Cette valeur est nulle et nous avons trouvé un vecteur tourbillon nul.

2.3.2. Ecoulements irrotationnels ou à potentiel des vitesses

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} = \vec{0}$$

L'écoulement est irrotationnel si

Cette propriété a pour conséquence $\vec{v} = \text{grad } \varphi$: le vecteur vitesse \vec{v} dérive d'une fonction potentiel φ . L'écoulement est dit à **potentiel des vitesses** ou plus simplement **écoulement potentiel**.

$$\Gamma = \int_{(c)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{(c)} \text{grad } \varphi \cdot d\vec{l} = \int_{(c)} d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A)$$

La circulation du vecteur vitesse est indépendante du chemin suivi pour un écoulement potentiel.

$$\text{div}(\mu \text{grad } \varphi) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$

En introduisant l'équation de conservation de la masse on obtient

Dans le cas d'un fluide **incompressible** ($\mu = \text{Cst}$), on obtient $\Delta \varphi = 0$

2.3.3. Ecoulements rotationnels : théorie tourbillonnaire

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} \neq \vec{0}$$

Dans ce type d'écoulements,

$$\Gamma = \oint_{(c)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{S} = 2 \iint_S \vec{\Omega} \cdot d\vec{S}$$

Pour une courbe fermée, où S est une surface

quelconque s'appuyant sur le contour (C) [Théorème de Stokes].
 La quantité $I = \Gamma$ est appelée intensité du tourbillon.

On appelle **ligne tourbillon**, une ligne tangente en chaque point au vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ en ce point et **filet tourbillon**, l'ensemble des lignes tourbillon s'appuyant sur une courbe fermée infiniment petite.

Le **vortex** est le cas particulier d'un filet tourbillon unique d'intensité finie.

Le cas particulier du **vortex rectiligne** est particulièrement important : il correspond à un champ de vitesses contenu dans le plan perpendiculaire au filet tourbillon, de direction radiale

$$v = \frac{I}{2\pi r}$$

et d'intensité de vitesse $2\pi r$ où r représente la distance entre le point considéré et le filet tourbillon.

2.3.4. Ecoulement potentiel avec circulation

Dans de nombreux cas, l'écoulement est irrotationnel dans tout l'espace sauf en un certain nombre de points singuliers pour lesquels le vecteur tourbillon est différent de zéro. Ces points se regroupent suivant un certain nombre de filets tourbillons distincts.

De tels écoulements sont dits : **écoulements à potentiel des vitesses avec circulation**.

Ils possèdent la propriété d'avoir une circulation du vecteur vitesse nulle suivant toute courbe fermée n'entourant pas un filet tourbillon, la circulation est constante et différente de zéro lorsque la courbe entoure (une fois) le filet tourbillon. Cette valeur est égale à **l'intensité du filet tourbillon**.

2.3.5. Ecoulement isovolume

$\text{div } \vec{v} = 0$; $\vec{v} = \text{rot } \vec{\psi}$: le vecteur vitesse \vec{v} dérive d'un **potentiel vecteur** $\vec{\psi}$.

Nous avons vu que ce type d'écoulement correspond au cas général de l'écoulement des fluides incompressibles et aussi d'écoulements stratifiés.

Pour un **écoulement plan** xOy , on a : $\vec{\psi} = \psi(x, y)\vec{e}_z$; $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$; $v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

Les lignes de courant sont définies par : $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$; $\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$; $\psi(x, y) = Cte$
 ψ est appelé **fonction courant**.

Débit volumique et fonction courant

Soient deux lignes de courant 1 et 2 passant respectivement par A et

B, les valeurs des fonctions courant sont ψ_1 et ψ_2 .

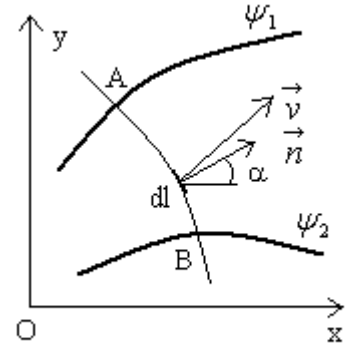
Soit un chemin quelconque allant de A à B.

L'écoulement est plan, le débit élémentaire par unité de hauteur est

$$\text{égale à } dQ = \vec{v} \cdot d\vec{S} = v n dl$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = v_x \cos \alpha + v_y \sin \alpha = v_x \frac{dy}{dl} - v_y \frac{dx}{dl}$$

$$dQ = \vec{v} \cdot \vec{n} dl = v_x dy - v_y dx = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi$$



Le débit entre les deux lignes de courant est indépendant du chemin pris pour aller d'une ligne à l'autre.

$$Q = \psi_2 - \psi_1$$

2.3.6. Ecoulement isovolume et rotationnel

Pour ce type d'écoulement : $\text{div } \vec{v} = 0$ et $\text{rot } \vec{v} = 2\vec{\Omega}$

On remarque que ces équations sont analogues à celles de la magnétostatique

$\text{div } \vec{B} = 0$ et $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ et donnent lieu aux mêmes traitements mathématiques.

$$\vec{v} = \frac{1}{2\pi} \iiint_V \frac{\vec{\Omega} dV \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Il existe donc l'équivalent de la loi de Biot-Savart :

Structure tourbillonnaire

Cette structure correspond à une situation bidimensionnelle où le fluide tourne autour de l'axe

des z avec une vitesse orthoradiale $\vec{v} = v(r, \theta) \vec{e}_\theta$.

$$\text{div } \vec{v} = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial v(r, \theta)}{\partial \theta} \quad v(r, \theta) = v(r)$$

$$\text{rot } \vec{v} = \text{rot}[v(r) \vec{e}_\theta] = \frac{1}{r} \frac{d[rv(r)]}{dr} \vec{e}_z = 2\vec{\Omega} = 2\omega \vec{e}_z$$

Une telle structure du champ de vitesse correspond à $\vec{\Omega} = \omega \vec{e}_z$: ce résultat était évident par analogie au champ magnétique créé par un courant électrique à section circulaire de longueur infinie.

$$\omega = \begin{cases} \omega_0 & \text{pour } 0 < r < a \\ 0 & \text{pour } r > a \end{cases}$$

Nous traitons le cas idéalisé où

Pour $0 < r < a$, $\frac{1}{r} \frac{d[rv(r)]}{dr} = 2\omega_0$ $v(r) = \omega_0 r + \frac{C}{r} = \omega_0 r$ car $C = 0$ sinon v deviendrait infini en $r = 0$.

Pour $r > a$, $\frac{1}{r} \frac{d[rv(r)]}{dr} = 0$ $v(r) = \frac{K}{r}$

La continuité de la vitesse en $r = a$ permet d'obtenir $K = \omega_0 a^2$

Remarques :

- ces résultats auraient pu être obtenus à partir de

$$\oint_{(c)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iiint_S \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{S} = 2 \iiint_S \vec{\Omega} \cdot d\vec{S} \quad (\text{analogue du théorème d'Ampère en Magnétostatique}),$$

$$\oint_{(c)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\omega_0 a^2}{r} r d\theta = 2\pi \omega_0 a^2 = I$$

- pour $r > a$, (c) (intensité du tourbillon).

2.3.7. Ecoulement isovolume et irrotationnel

Pour ce type d'écoulement : $\text{div } \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \text{rot } \vec{\psi}$ et $\text{rot } \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \text{grad } \varphi$

On obtient,

$$\text{div } \vec{v} = 0 = \text{div}(\text{grad } \varphi) = \Delta \varphi$$

$$\text{rot } \vec{v} = 0 = \text{rot}(\text{rot } \vec{\psi}) = \text{grad}(\text{div } \vec{\psi}) - \Delta \vec{\psi} = -\Delta \vec{\psi} \text{ en introduisant une relation de jauge}$$

$$\text{div } \vec{\psi} = 0$$

Pour un écoulement plan xOy , on a

$$\varphi = \varphi(x, y); \vec{\psi} = \psi(x, y)\vec{e}_z; v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La condition $\text{div } \vec{\psi} = 0$ est naturellement satisfaite, c'est à dire que la solution

$$\vec{\psi} = \psi(x, y)\vec{e}_z \text{ est unique.}$$

Dans ce type d'écoulement on introduit la **fonction potentiel complexe**,

$$f(z, t) = \varphi(x, y, t) + j\psi(x, y, t) \text{ où } z = x + jy$$

$$w(z, t) = \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - j \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_x - jv_y$$

3. Dynamique des fluides

3.1. Equation de Navier. Equation de Navier-Stokes. Equation d'Euler

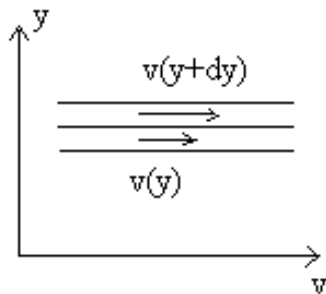
Il s'agit d'écrire l'équation fondamentale de la dynamique pour la particule fluide de masse

$$dm = \mu dV, \text{ soit dans un référentiel galiléen } \mu \vec{a} = \sum \frac{d\vec{F}_{ext}}{dV}$$

Les forces extérieures sont de trois types,

- celles dues à un ou plusieurs champ(s) de forces extérieures (le cas courant étant le champ de pesanteur $\mu \vec{g} = -\text{grad}gz$)
- celles dues aux forces de pression mécanique $-\text{grad}p'$
- celles de viscosité

Analyse simplifiée



Considérons le cas particulier d'un champ de vitesses plan défini par $\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$ (cas de l'écoulement entre deux plans parallèles).

Entre deux couches successives de fluides à vitesses $v(y)$ et $v(y+dy)$, on traduit les forces de viscosité (tangentielles) par la

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}$$

loi newtonienne :

Les contraintes normales sont données par $\sigma_n = -p' = -p$ où on confond pression mécanique et pression thermodynamique

L'accélération se calcule à partir de la formule de dérivation explicitée dans la paragraphe 1.2.

$$a_x = \frac{Dv_x}{dt} = v \text{ grad} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial t} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \quad a_x = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t}$$

Nous écrivons le principe fondamental de la dynamique pour un élément de fluide compris entre x et $x+dx$, y et $y+dy$, de profondeur (direction Z) unitaire.

$$\begin{aligned} \mu dx dy \frac{Dv}{Dt} &= p(x)dy - p(x+dx)dy + \eta \left(\frac{dv}{dy}\right)_{y+dy} dx - \eta \left(\frac{dv}{dy}\right)_y dx \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy + \eta \frac{d^2 v}{dy^2} dx dy \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \mu \frac{Dv}{Dt} = -\frac{dp}{dx} + \eta \frac{d^2 v}{dy^2}$$

$\eta \frac{d^2 v}{dy^2} e_x$ apparaît comme la densité volumique des forces de viscosité.

Pour un écoulement quelconque, la généralisation de cette formule conduit à $\eta \Delta \vec{v}$ (densité volumique des forces de viscosité) et à l'équation,

$$\vec{\mu} a = \mu \frac{D\vec{v}}{dt} = \mu \vec{g} - \text{grad } p + \eta \Delta \vec{v}$$

Analyse approfondie

L'analyse des forces de viscosité et l'hypothèse, pour un fluide newtonien, de proportionnalité entre forces de viscosité par unité de surface (contraintes) et déformations de la particule fluide conduisent au tenseur des contraintes visqueuses et aux formules de Lamé ci-après.

$$\begin{pmatrix} t_{xx} & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & t_{yy} & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & t_{zz} \end{pmatrix}$$
 le tenseur des contraintes visqueuses est un tenseur symétrique

Les valeurs des composantes (contraintes visqueuses) sont données par les formules de Lamé :

$$t_{xx} = 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} + \eta' \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right); \quad t_{yy} = 2\eta \frac{\partial v_y}{\partial y} + \eta' \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right);$$

$$t_{zz} = 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} + \eta' \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

$$t_{xy} = t_{yx} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right); \quad t_{yz} = t_{zy} = \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right); \quad t_{zx} = t_{xz} = \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

En plus de la viscosité η (dite viscosité de cisaillement), on introduit la viscosité de dilatation η' .

L'accélération se calcule à partir de la formule de dérivation explicitée dans la paragraphe 1.2.

$$a_x = \frac{Dv_x}{dt} = \vec{v} \text{ grad } v_x + \frac{\partial v_x}{\partial t} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

En introduisant des relations identiques suivant les deux autres directions d'espace, on obtient :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{dt} = (\vec{v} \text{ grad}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{2} \text{grad } v^2 + \text{rot } \vec{v} \wedge \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad \text{où}$$

$$\vec{v} \text{ grad} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \text{ est un opérateur.}$$

$$\vec{\mu} \vec{a} = \mu \frac{D \vec{v}}{dt} = \mu [(\vec{v} \text{ grad}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}] = \mu [\frac{1}{2} \text{grad } v^2 + \text{rot } \vec{v} \wedge \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}] =$$

$$\vec{\mu} \vec{g} - \text{grad } p + \eta \Delta \vec{v} + (\eta + \eta') \text{grad}(\text{div } \vec{v})$$

est l'équation de la dynamique des fluides dite de **Navier** pour un fluide newtonien dans le seul champ de forces extérieures de pesanteur.

$$\underline{\eta}$$

La quantité μ est appelée **viscosité cinématique** de cisaillement.

Remarques sur la complexité de l'équation de Navier

- les viscosités dépendent de l'écoulement et l'écoulement dépend des viscosités (en particulier, pour traduire la nature turbulente d'un écoulement, on doit introduire des termes, dits de viscosité turbulente, supplémentaires liées aux fluctuations),
- on montre, à partir du second principe de la Thermodynamique, que la quantité $2\eta + 3\eta' \geq 0$,

- on montre que la pression mécanique P' se confond avec la pression

thermodynamique P si l'écoulement est isovolume ($\text{div } \vec{v} = 0$) ou si la condition de Stokes ($2\eta + 3\eta' = 0$), qui fait l'hypothèse de réversibilité des déformations, est satisfaite,

- si la condition de **Stokes** est satisfaite, l'équation de Navier devient l'équation de

$$\vec{\mu} \vec{a} = \mu \frac{D \vec{v}}{dt} = \vec{\mu} \vec{g} - \text{grad } p + \eta [\Delta \vec{v} + \frac{1}{3} \text{grad}(\text{div } \vec{v})]$$

Navier-Stokes :

Les applications de ce cours sont limitées :

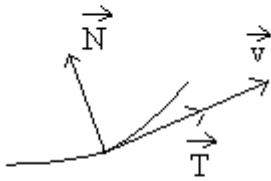
- à l'approximation des **fluides non-visqueux (parfaits)**,
- et aux **fluides réels incompressibles**.

3.1.1. Equation de Navier-Stokes pour les fluides non-visqueux (parfaits)

Dans ce cas particulier, l'équation de Navier-Stokes est appelée **équation d'Euler**.

$$\vec{\mu} \vec{a} = \mu \frac{D \vec{v}}{dt} = \mu [(\vec{v} \text{ grad}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}] = \mu [\frac{1}{2} \text{grad } v^2 + \text{rot } \vec{v} \wedge \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}] = \vec{\mu} \vec{g} - \text{grad } p$$

Ecriture de l'équation d'Euler dans le repère de Frénet



$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{dt} = \frac{D(v\vec{T})}{dt} = \frac{v^2}{R} \vec{N} + \frac{Dv}{dt} \vec{T} \quad \text{où } R \text{ est le rayon de courbure.}$$

Si s est l'abscisse curviligne,

$$\frac{Dv}{Dt} = (\vec{v} \text{ grad})v + \frac{\partial v}{\partial t} = v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{N} + \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \right] \vec{T}$$

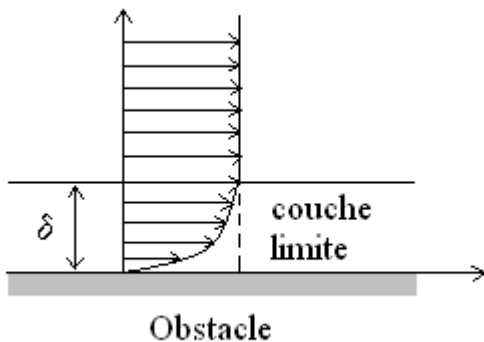
$$\mu \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \right] = \mu g_T - \frac{\partial p}{\partial s}$$

$$\mu \frac{v^2}{R} = \mu g_N - \frac{\partial p}{\partial N}$$

L'équation d'Euler s'écrit

Approximation "fluide non-visqueux (parfait)"

Le fluide non-visqueux n'existe pas et il s'établit au proche voisinage d'un objet solide une couche limite dans le fluide en écoulement.



Dans la couche limite la vitesse varie rapidement en s'éloignant de l'obstacle, alors qu'en dehors de la couche limite la vitesse est uniforme dans une section droite.

En dehors de la couche limite, le champ des vitesses obéit à l'équation d'Euler, le fluide se comporte comme un fluide parfait.

Dans la couche limite, on ne peut négliger les forces de viscosité, en particulier au contact de l'obstacle où vitesse du fluide et vitesse du point en contact de l'obstacle sont identiques même pour des viscosités faibles.

Pour un obstacle immobile dans le référentiel d'étude, les vitesses des particules fluide au contact sont nulles ... ce qui n'est pas le cas dans l'approximation fluide parfait.

L'étude des écoulements de fluides visqueux montre que l'introduction du nombre (sans dimension) de Reynolds est fondamental :

- pour déterminer la nature de l'écoulement (laminaire pour $Re < 2000$; turbulent pour $Re > 6000$; de transition pour $2000 < Re < 6000$),
- pour connaître l'importance des forces de frottement (le coefficient de frottement C_x dépendant de Re)
- ou pour évaluer l'épaisseur d de la couche limite qui diminue lorsque Re augmente.

$$Re = \frac{\mu v L}{\eta}$$

Le nombre de Reynolds est défini par $\frac{\mu v L}{\eta}$ où v est la vitesse du fluide "loin" de l'obstacle et L une dimension caractéristique de l'obstacle (la longueur dans le sens de l'écoulement dans le cas d'une plaque, le diamètre pour une conduite circulaire, ...)

3.1.2. Equation de Navier-Stokes pour les fluides réels incompressibles

$\mu = \text{cte}$ $\delta \text{ div } \vec{v} = 0$, l'équation de Navier devient :

$$\mu \vec{a} = \mu \frac{D\vec{v}}{dt} = \mu \left[(\vec{v} \text{ grad}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] = \mu \left[\frac{1}{2} \text{grad } v^2 + \text{rot } \vec{v} \wedge \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] = \mu \vec{g} - \text{grad } p + \eta \Delta \vec{v}$$

Fluides compressibles ou fluides incompressibles

Un fluide est dit incompressible lorsque sa masse volumique ne dépend pas (pratiquement pas) de la pression ou de la température. Généralement, en Statique des fluides, les liquides sont considérés comme incompressibles et les gaz sont compressibles.

Pour un fluide en écoulement, ce classement est infirmé dans un certain nombre de situations importantes :

- pour les gaz et pour les liquides, des gradients de température décroissant avec l'altitude provoquent des mouvements ascensionnels de matière (convection naturelle) qui ont pour conséquence d'homogénéiser la température ; ces mouvements ne peuvent s'expliquer sans considérer des variations de masse volumique,
- dans les gaz et les liquides, des perturbations de pression donnent naissance à des phénomènes de propagation (onde sonore) qui ne peuvent être expliqués sans la notion de compressibilité,
- l'approximation fluide incompressible est souvent justifiée pour un gaz s'écoulant, dans un plan horizontal, jusqu'à des vitesses égales au tiers de la vitesse du son égale à 340 m/s pour l'air dans les conditions courantes.

Ainsi c'est la nature de l'écoulement qui permet de distinguer l'écoulement compressible de l'écoulement incompressible et non la nature du fluide.

On emploie l'expression **hydrodynamique** pour qualifier un écoulement incompressible sans qu'il soit nécessaire que le fluide soit de l'eau ou un liquide et l'expression **aérodynamique** pour qualifier l'écoulement d'un fluide compressible sans qu'il soit nécessaire que ce fluide soit de l'air ou un gaz.

3.2. Equation d'Euler et théorème de Bernoulli

Multiplions scalairement l'équation d'Euler par le déplacement élémentaire

$$d\vec{s} = ds \vec{T} = \vec{v} dt \text{ suivant une ligne de courant. En remarquant que la quantité}$$

$(\text{rot } \vec{v} \wedge \vec{v}) d\vec{s}$ est nulle puisque le produit mixte comporte deux vecteurs parallèles, on obtient :

$$\mu \left[\text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] d\vec{s} = \mu \vec{g} d\vec{s} - \text{grad} p d\vec{s} \quad d \left(\frac{1}{2} v^2 + gz \right) + \frac{dp}{\mu} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\vec{s} = 0$$

Un fluide (surtout les gaz) est peu conducteur de la chaleur si bien que l'hypothèse " transferts d'énergie thermique négligeables " est raisonnable ($\delta Q \approx 0$).

La quantité $\frac{dp}{\mu}$ est, dans ce cas, égale à $d\bar{H}$ si bien qu'en intégrant suivant une ligne de

courant, on obtient $\frac{1}{2} v^2 + gz + \bar{H} + \int_k \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\vec{s} = f_k(t)$ où la " constante " d'intégration $f_k(t)$ dépend de la ligne de courant considérée.

3.2.1. Cas d'un écoulement permanent

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ $\frac{1}{2} v^2 + gz + \bar{H} = F_k$ où F_k est une constante dépendant de la ligne de courant considérée.

3.2.2. Cas d'un écoulement irrotationnel

La quantité $\text{rot } \vec{v} \wedge \vec{v}$ est nulle, il n'est plus nécessaire de se placer suivant une ligne de courant.

On obtient $\frac{1}{2} v^2 + gz + \bar{H} + \int \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\vec{OM} = f(t)$ où la " constante " d'intégration $f(t)$ est indépendante de la ligne de courant et a même valeur dans tout le fluide.

Pour un fluide incompressible ($\mu = \text{Cte}$), il est intéressant d'introduire la relation

$\vec{v} = \text{grad } \varphi$, le théorème de Bernoulli s'écrit alors : $\frac{1}{2} v^2 + gz + \bar{H} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(t)$.

3.2.3. Cas d'un écoulement permanent irrotationnel

$$\frac{1}{2} v^2 + gz + \bar{H} = \text{Cte}$$

3.2.4. Rappel de Thermodynamique. Ecritures pour un fluide incompressible et pour un fluide compressible de type gaz parfait.

$$d\bar{H} = \delta Q + \bar{V} dp = \frac{dp}{\mu} \text{ pour } \delta Q = 0$$

$$\bar{H} = \frac{P}{\mu} + Cte$$

a) Pour un **fluide incompressible**,

$$\frac{1}{2}v^2 + gz + \frac{P}{\mu} = Cte$$

L'équation , obtenue pour l'écoulement permanent, irrotationnel d'un fluide incompressible porte plus particulièrement le nom d'**équation de Bernoulli**.

b) Pour un **fluide compressible** de type **gaz parfait**, $\bar{H} = \bar{C}_p T + Cte$

$$\frac{1}{2}v^2 + gz + \bar{C}_p T = Cte$$

L'équation , obtenue pour l'écoulement permanent, irrotationnel d'un fluide compressible type gaz parfait porte le nom de **Saint Venant**.

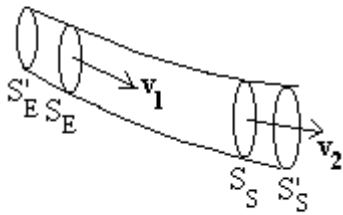
Pour la résolution, l'équation de Saint Venant est à compléter par l'équation d'état des gaz

$$\frac{P}{\mu} = \frac{RT}{M}$$

parfaits et par l'équation d'isentrolicité $P\mu^{-\gamma} = Cte$.

3.3. Bilans énergétiques pour des écoulements permanents

3.3.1. Bilan énergétique



Isolons un tube de courant suffisamment étroit (filet) pour que la pression et la vitesse d'écoulement puissent être considérées uniformes sur toute section droite.

En régime permanent la forme du tube est invariante.

Le système, à l'instant t , est constitué du fluide de masse

dm entre les sections droites (S'_E, S_E) et du fluide de masse

M entre les sections (S_E, S_S). A l'instant $t + dt$, il est entre les

sections (S_E, S'_S). La masse dm située, à l'instant t , entre les

sections (S'_E, S_E) se retrouve, à l'instant $t + dt$, entre les

sections (S_S, S'_S).

Cette masse dm est, à l'instant t , à pression P_1 , à vitesse \vec{v}_1 et à l'altitude Z_1 ; elle est, à

l'instant $t + dt$, à pression P_2 , à vitesse \vec{v}_2 et à l'altitude Z_2 .

Le bilan énergétique (application du premier principe de la Thermodynamique pour un système ouvert) conduit à :

$$dm\left(\frac{1}{2}v_2^2 + gz_2 + \overline{U}_2\right) - dm\left(\frac{1}{2}v_1^2 + gz_1 + \overline{U}_1\right) = \delta W + \delta Q \quad \text{où } \delta Q \approx 0 \text{ (hypothèse " transferts d'énergie thermique négligeables ")}$$

Si on néglige le phénomène de **viscosité** (δ pas de perte d'énergie mécanique par frottement entre deux tubes de courant adjacents), le travail δW se confond avec le travail de

transvasement, soit $\delta W = dm(p_1 \overline{V}_1 - p_2 \overline{V}_2)$.

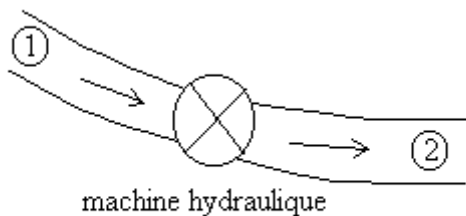
En reportant cette dernière expression, on retrouve, par **bilan énergétique**, l'équation

$$\frac{1}{2}v^2 + gz + \overline{H} = Cte$$

Remarques :

- l'établissement de l'équation de bilan énergétique a été faite pour un filet de fluide où on peut considérer que pression, vitesse et énergie potentielle sont uniformes sur toute section droite du filet ; on notera que, pour la surface plane d'un liquide au contact avec un gaz, ces conditions sont remplies, cette surface n'étant pas de dimensions faibles
- dans le cas des écoulements irrotationnels, on montre (voir paragraphe précédent) que la valeur de la constante est indépendante du tube de courant.

3.3.2. Présence d'une machine hydraulique dans l'écoulement



Il faut tenir compte de l'énergie mécanique fournie (pompe) ou absorbée (turbine) par la machine.

Pour un écoulement de fluide non visqueux :

$$\left(\frac{1}{2}v_2^2 + gz_2 + \overline{H}_2\right) - \left(\frac{1}{2}v_1^2 + gz_1 + \overline{H}_1\right) = \overline{E}$$

où \overline{E} est l'énergie massique de la machine. Elle est positive pour une pompe, négative pour une turbine.

La puissance de la pompe ou de la turbine est $P = \dot{m} \overline{E}$ si \dot{m} est le débit massique.

3.3.3. Pertes de charges

Perte de charge " linéaire " ou " linéique "

L'écoulement permanent de fluides visqueux dans une conduite droite, horizontale, à section constante, fait apparaître des chutes de pression liées à la longueur de la conduite et à la viscosité.

$$P_1 - P_2 = \Delta P_c \text{ (perte de charge linéaire)}$$

Plus généralement, il convient d'écrire le théorème de Bernoulli sous la forme :

$$\left(\frac{1}{2}v_1^2 + gz_1 + \overline{H_1}\right) - \left(\frac{1}{2}v_2^2 + gz_2 + \overline{H_2}\right) = \frac{\Delta p_c}{\mu}$$

Sous forme adimensionnelle, on introduit le coefficient de perte de charge Λ par la relation :

$$\Lambda = \frac{D_h}{\frac{1}{2}\mu \langle v \rangle^2} \frac{\Delta p_c}{L}$$

où

- L est la longueur de la conduite,

- D_h le diamètre hydraulique de la conduite définie par $D_h = \frac{4S}{P}$ (S et P étant respectivement la section et le périmètre de la conduite),

- $\langle v \rangle$ la vitesse moyenne de débit définie par $\dot{m} = \mu S \langle v \rangle = \mu q_v$ où q_v est le débit volumique.

Loi de Poiseuille : pour un écoulement laminaire dans une conduite circulaire de rayon R , on

démontre que $\Lambda = \frac{64}{Re} = \frac{32\eta}{\mu \langle v \rangle R} \Leftrightarrow \frac{\Delta p_c}{L} = \frac{8\eta q_v}{\pi R^4}$. Le résultat présenté sous la deuxième forme, est appelé **Loi de Poiseuille**.

Perte de charge singulière

Il existe, aussi, des pertes de charges dites **singulières** lors de modifications de la géométrie de la conduite (élargissement ou contraction brusque de la veine, coude, passage à travers une grille, vanne, robinet, ...).

Contrairement au cas des pertes de charges linéaires où le calcul théorique est possible dans quelques cas simples, on a recours, pour les pertes de charges singulières à des données semi-empiriques.

3.4. Théorème d'Euler. Bilan de quantité de mouvement et de moment cinétique dans un écoulement permanent

Bilan de quantité de mouvement

Nous reprenons le schéma du tube de courant.

La masse $M+dm$ à l'instant t a une quantité de mouvement : $\vec{p}(t) = dm\vec{v}_1 + p'(M)$

La masse $M+dm$ à l'instant $t+dt$ a une quantité de mouvement : $\vec{p}(t+dt) = dm\vec{v}_2 + p'(M)$

Ainsi $\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt} dt = dm(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$

Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire le **théorème d'Euler** :

$$\frac{dm}{dt}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{P} + \vec{R} \quad \text{où } \frac{dm}{dt} \text{ est le débit massique du fluide, } \vec{P} \text{ est le poids de fluide}$$

considéré (si on se limite à des forces de volume de pesanteur) et \vec{R} l'action sur la portion de fluide considérée des éléments en contact avec celle-ci (forces de pression si on ne considère pas les efforts de viscosité).

Pour un volume de contrôle quelconque où S est la surface fermée le délimitant, le débit

$$\text{massique sortant par un élément } dS = dS \vec{n} \text{ est égal à } \frac{d^2 m}{dt} = \mu \vec{V} dS \vec{n}$$

Pour ce débit massique, le " débit " de quantité de mouvement est égal à

$$\frac{d^2 \vec{p}}{dt} = \frac{d^2 m}{dt} \vec{V} = \mu dS \vec{V} (\vec{V} \vec{n})$$

En intégrant au volume de contrôle, on obtient le **théorème d'Euler** :

$$\oint_S \mu \vec{V} (\vec{V} \vec{n}) dS = \iiint_V \mu \vec{g} dV + \oint_S \vec{T} dS$$

En utilisant le principe de l'action et de la réaction, on accède simplement à l'action du fluide sur les parois en contact.

Bilan de moment cinétique

Un raisonnement de même type conduit au bilan de moment cinétique :

$$\oint_S \vec{OM} \wedge \mu \vec{V} (\vec{V} \vec{n}) dS = \iiint_V \vec{OM} \wedge \mu \vec{g} dV + \oint_S \vec{OM} \wedge \vec{T} dS$$