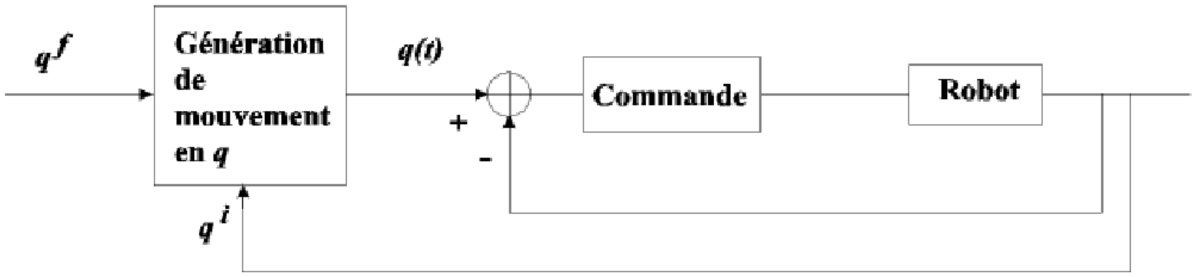
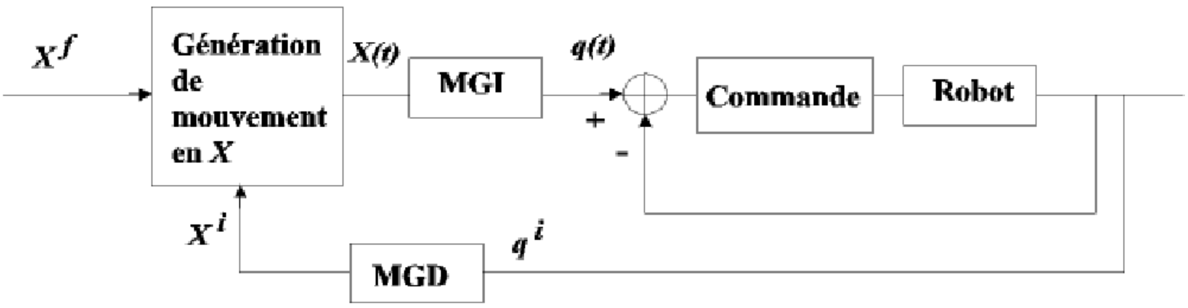
Génération de trajectoire

La tâche de déplacement d'un robot est spécifiée en définissant un chemin que le robot doit suivre. Un *chemin* est une séquence de *points* définis soit dans l'espace des tâches (opérationnel) (afin de situer l'organe terminal), soit dans l'espace des configurations (articulaire) du robot (afin d'indiquer les valeurs des paramètres de liaison).

Génération de trajectoires et boucles de commande



Génération de mouvement dans l'espace articulaire



Génération de mouvement dans l'espace opérationnel

- La génération de mouvement dans l'*espace articulaire* présente plusieurs avantages :
  - le mouvement est minimal sur chaque articulation,
  - elle nécessite moins de calcul en ligne (au sens où il n'y a pas de changeur de coordonnées),
  - le mouvement n'est pas affecté par le passage sur les configurations singulières,
  - les contraintes de vitesse et de couples maximaux sont connues avec précision puisqu'elles correspondent aux limites physiques des actionneurs.

En contrepartie, la géométrie de la trajectoire dans l'espace opérationnel ne peut être imposée. Entre 2 points donnés, l'organe terminal se déplace de façon imprévisible mais répétitive (ce qui peut occasionner des collisions lorsque le robot évolue dans un environnement encombré). Ce type de mouvement est par conséquent approprié pour réaliser des déplacements rapides dans un espace dégagé.

- La génération de mouvement dans l'*espace opérationnel* permet de contrôler la géométrie de la trajectoire (mouvement rectiligne par exemple). Par contre :
  - elle implique la transformation en coordonnées articulaires de chaque point de la trajectoire,
  - elle peut être mise en échec lorsque la trajectoire calculée passe par une position singulière,
  - elle peut être mise en échec chaque fois que les points de la trajectoire engendrée ne sont pas dans le volume accessible du robot ou chaque fois que la trajectoire impose une reconfiguration du mécanisme (changement d'aspect en cours de trajectoire).

Génération de mouvement point à point :

La méthode de base définit la loi d'évolution pour un mouvement point à point à une dimension. Définissons les fonctions du temps $J(t)$ pour le jerk, $A(t)$ pour l'accélération, $V(t)$ pour la vitesse et $X(t)$ pour la position. De la mécanique classique, nous savons que la vitesse correspond à la première dérivée de la position, l'accélération à la première dérivée de la vitesse et le jerk à la première dérivée de l'accélération :

$$V(t) = \frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} \qquad A(t) = \frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} \qquad J(t) = \frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3.2}$$

Les conditions initiales du mouvement sont définies par A_0 pour l'accélération, V_0 pour la vitesse et X_0 pour la position. Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} A(t) = & \quad A_0 + \int_0^t J(u)\mathrm{d}u \\ V(t) = & \quad V_0 + \int_0^t A(u)\mathrm{d}u \\ X(t) = & \quad X_0 + \int_0^t V(u)\mathrm{d}u \end{aligned} \tag{3.3}$$

Les contraintes cinématiques sont définis par J_{max} pour le jerk maximal ($|J(t)| \leq J_{max}$), A_{max} pour l'accélération maximale et V_{max} pour la vitesse maximale.
Les conditions initiale et finale s'expriment :

$$\begin{array}{ll} A(T_0) = 0 & A(T_f) = 0 \\ V(T_0) = 0 & V(T_f) = 0 \\ X(T_0) = X_0 & X(T_f) = X_f \end{array}$$

Mouvement élémentaire à accélération maximale

Les équations du mouvement à accélération donnée A_{max} sont :

$$A(t) = A_{max}$$
$$V(t) = V_0 + A_{max}(t - T_0)$$
$$X(t) = X_0 + V_0(t - T_0) + \frac{1}{2}A_{max}(t - T_0)^2$$

Durant ce type de mouvement, la vitesse varie linéairement par rapport au temps et la position de façon polynomiale. Les conditions finales en T_f pour le mouvement sont données par :

$$\begin{aligned} A(T_f) &= A_{max} \\ V(T_f) &= V_0 + A_{max}T \\ X(T_f) &= X_0 + V_0 T + \frac{1}{2}A_{max}T^2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Mouvement élémentaire à vitesse maximale

Les équations d'un mouvement ayant une vitesse fixée à V_{max} sont :

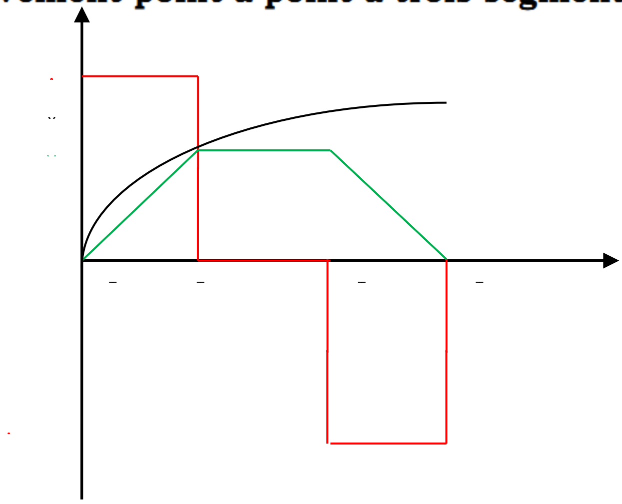
$$V(t) = V_{max}$$
$$X(t) = X_0 + V_{max}(t - T_0)$$

Pendant ce type de mouvement, la position varie linéairement avec le temps. Les conditions finales en T_f pour le mouvement sont données par :

$$\begin{aligned} A(T_f) &= 0 \\ V(T_f) &= V_{max} \\ X(T_f) &= X_0 + V_{max}T \end{aligned} \tag{3.9}$$

Au niveau de la régularité, chacun des mouvements élémentaires est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à l'intérieur de l'intervalle $]T_0, T_f[$ car ce sont des fonctions polynomiales.

Mouvement point à point à trois segments



Génération de mouvement par interpolation

La technique d`interpolation consiste à interpoler entre les points intermédiaires pour produire une trajectoire souple (ou lisse), c`est à dire qu`elle admet au moins deux dérivées continues pour éviter le cas d`une accélération infinie. Pour satisfaire à cette exigence, on peut adopter les trajectoires cubiques qui ont deux dérivées.

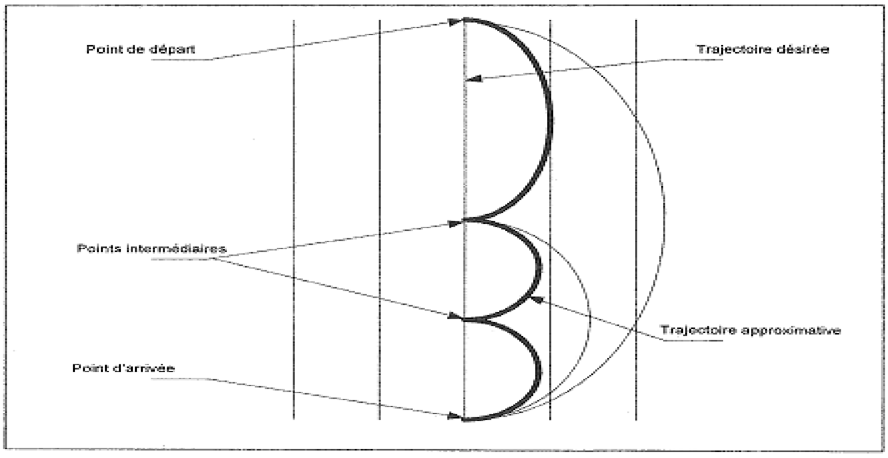


Figure 5 Découpage d'un segment de trajectoire

Application dans l'espace articulaire

Prenons le cas le plus simple, le point de départ q^0 et le point d`arrivée $q^f$ et deux points intermédiaires $q^1$ et $q^2$. Une trajectoire cubique (dans l`espace des articulations) est donnée par:

$$q(t) = a_0 + a_1.t + a_2.t^2 + a_3.t^3 \quad \text{avec} \quad 0 \leq t \leq T$$

Où T est le temps nécessaire pour parcourir cette trajectoire.

Puisqu'on a quatre points on a besoin de trois trajectoires cubiques l'une $q_1(t)$ pour aller du point de départ q_0 au point q_1; la seconde, $q_2(t)$ pour aller de q_1 au point q_2; et la dernière trajectoire $q_3(t)$ pour aller de q_2 au point q_f :

Première trajectoire

$$\begin{cases} q_1(t) = a_{10} + a_{11}.t + a_{12}.t^2 + a_{13}.t^3. \\ \dot{q}_1(t) = a_{11} + 2.a_{12}.t + 3.a_{13}.t^2. \\ \ddot{q}_1(t) = 2.a_{12} + 6.a_{13}.t. \end{cases}$$

Avec $0 \leq t \leq t_1$ où t_1 est le temps nécessaire pour aller de q_0 à q_1

Seconde trajectoire :

$$\begin{cases} q_2(t) = a_{20} + a_{21}.t + a_{22}.t^2 + a_{23}.t^3. \\ \dot{q}_2(t) = a_{21} + 2.a_{22}.t + 3.a_{23}.t^2. \\ \ddot{q}_2(t) = 2.a_{22} + 6.a_{23}.t. \end{cases}$$

avec $0 \leq t \leq t_2$ où t_2 est le temps nécessaire pour aller de q_1 à q_2

Troisième trajectoire :

$$\begin{cases} q_3(t) = a_{30} + a_{31}.t + a_{32}.t^2 + a_{33}.t^3. \\ \dot{q}_3(t) = a_{31} + 2.a_{32}.t + 3.a_{33}.t^2. \\ \ddot{q}_3(t) = 2.a_{32} + 6.a_{33}.t. \end{cases}$$

avec $0 \leq t \leq t_3$ où t_3 est le temps nécessaire pour aller de q_2 à q_f

Le temps total pour aller du point de départ au point final est alors :

$$t_{traj} = t_1 + t_2 + t_3$$

Puisqu'on connaît la vitesse initiale v_0 qui est la vitesse au point q_0 et la vitesse finale v_f qui est la vitesse au point q_f et en assurant la continuité de vitesse et celle de l'accélération aux points intermédiaires, on peut calculer les coefficients des équations des trajectoires. En effet :

$$q_1(0) = a_{10} \Rightarrow a_{10.} = q^0$$

$$q_1(t_1) = q_2(0) \Rightarrow a_{10.} + a_{11}.t_1 + a_{12}.t_1^2 + a_{13}.t_1^3 = q^1$$

$$\Rightarrow a_{11}.t_1 + a_{12}.t_1^2 + a_{13}.t_1^3 = q^1 - q^0.$$

$$\dot{q}_1(t_1) = \dot{q}_2(0) \Rightarrow a_{11.} + 2.a_{12}.t_1 + 3.a_{13}.t_1^2 = 0$$

$$\ddot{q}_1(t_1) = \ddot{q}_2(0) \Rightarrow a_{11.} + 3.a_{12}.t_1 - .a_{22.} = 0$$

$$q_2(0) = a_{20} \Rightarrow a_{20.} = q^1.$$

$$q_2(t_2) = q_3(0) \Rightarrow a_{20.} + a_{21..}t_2 + a_{22}\,.t_2^2 + a_{23..}t_2^3 = q^2$$

$$\Rightarrow a_{21..}t_2 + a_{22..}t_2^2 + a_{23..}t_2^3 = q^2 - q^1.$$

$$\dot{q}_2(t_2) = \dot{q}_3(0) \Rightarrow a_{21.} + 2.a_{22..}t_2 + 3.a_{23..}t_2^3 = 0$$

$$\ddot{q}_2(t_2) = \ddot{q}_3(0) \Rightarrow a_{21.} + 3.a_{22..}t_2 - .a_{32.} = 0$$

$$q_3(0) = a_{30} \Rightarrow a_{30.} = q^2$$

$$q_3(t_3) = q^f \Rightarrow a_{30.} + a_{31..}t_3 + a_{32..}t_3^2 + a_{23..}t_3^3 = q^f$$

$$\Rightarrow a_{31..}t_3 + a_{32..}t_3^2 + a_{33..}t_3^3 = q^f - q^2$$

$$\dot{q}_3(t_3) = v^f \Rightarrow a_{31.} + 2.a_{32..}t_3 + 3.a_{33..}t_3^2 = v^f$$

$$\dot{q}_1(0) = v^0 \Rightarrow a_{11.} = v^0$$

soit sous forme matricielle on a:

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ q_1 - q_0 \\ 0 \\ 0 \\ q_2 - q_1 \\ 0 \\ 0 \\ q_f - q_2 \\ v_f \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & t_1^2 & t_1^3 & & & & & & 0 \\ 1 & 2.t_1 & 3.t_1^2 & -1 & & & & & 0 \\ 0 & 1 & 3.t_1 & 0 & -1 & & & & 0 \\ 0 & & 0 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 & & & 0 \\ 0 & & & 1 & 2.t_2 & 3.t_2^2 & -1 & & 0 \\ 0 & & & & 1 & 3.t_2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & & & & & 0 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2.t_3 & 3.t_3^2 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

On peut généraliser les formules utilisées pour le problème de deux points intermédiaires. Supposons qu'on a f trajectoires (c'est à dire on a f-1 points intermédiaires). L'équation de la i-ème trajectoire $q_i(t)$ qui doit aller du point q_{i-1} au point q_i est donnée par :

$$q_i(t) = a_{i0} + a_{i1}.t + a_{i2}.t^2 + a_{i3}.t^3 \qquad i=1\ldots f;$$

avec $0 \leq t \leq t_i$ où t_i est le temps nécessaire pour parcourir cette trajectoire.

Et i allant de 1 jusqu'à f.

Alors, le temps total pour aller du point de départ au point final est :

$$t_{traj} = \sum_{i=1}^{i=f} ti$$

Sous forme matricielle, on peut écrire que $B = A.X$; Où

X est le vecteur des coefficients des trajectoires de dimension $3f$ x 1.

A est une matrice de dimension $3f$ x $3f$

B est un vecteur de données initiales de dimension 3fx1

Donc $X = A^{-1} .B$.

Application dans l'espace cartésien

Pour contrôler les n articulations d'un robot, la trajectoire désirée doit être spécifiée dans l'espace des articulations. La position de départ, celle d'arrivée, ainsi que l'orientation du poignet du robot sont supposées être données dans l'espace cartésien sous forme de deux points p_0 et p_f à l'instant de départ t_0 et à l'instant d'arrivée ou finale t_f respectivement. Il faut convertir ces deux positions « cartésiennes » à leurs équivalents dans l'espace articulaire : q_0 et q_f respectivement. Lorsqu'on transforme la ligne droite