

Commande des robots

I. Commande dynamique

Driving torques at the joints

Torques caused by the external force and moment exerted by the end-effector when in contact with the environment (Principle of virtual work)

Gravity torques

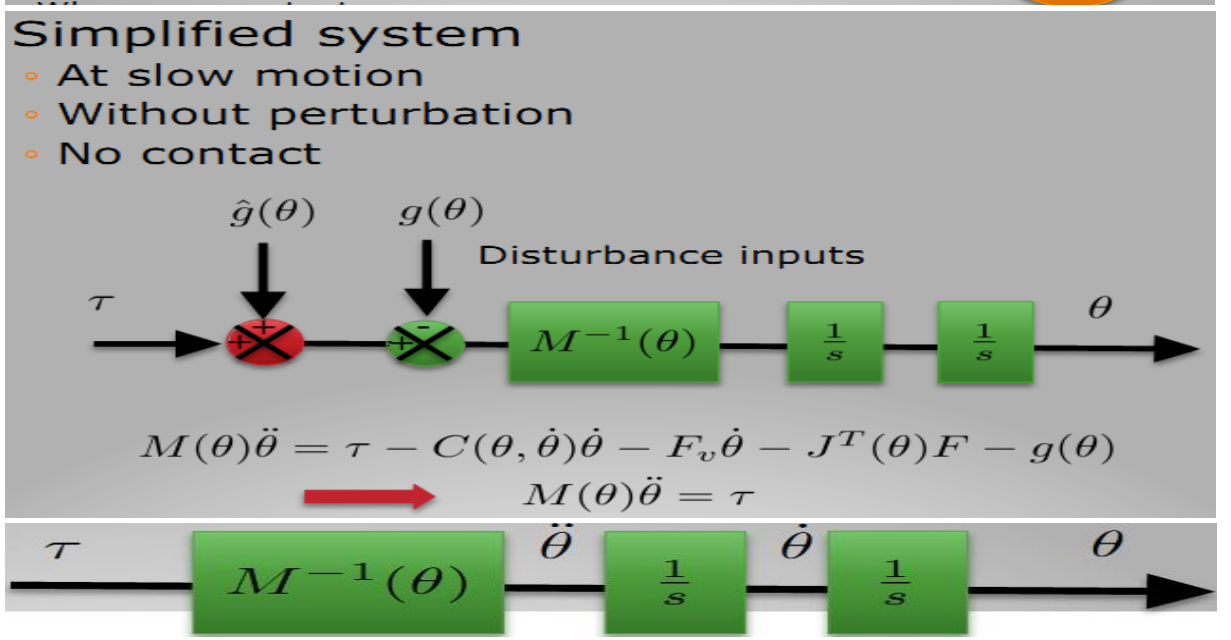
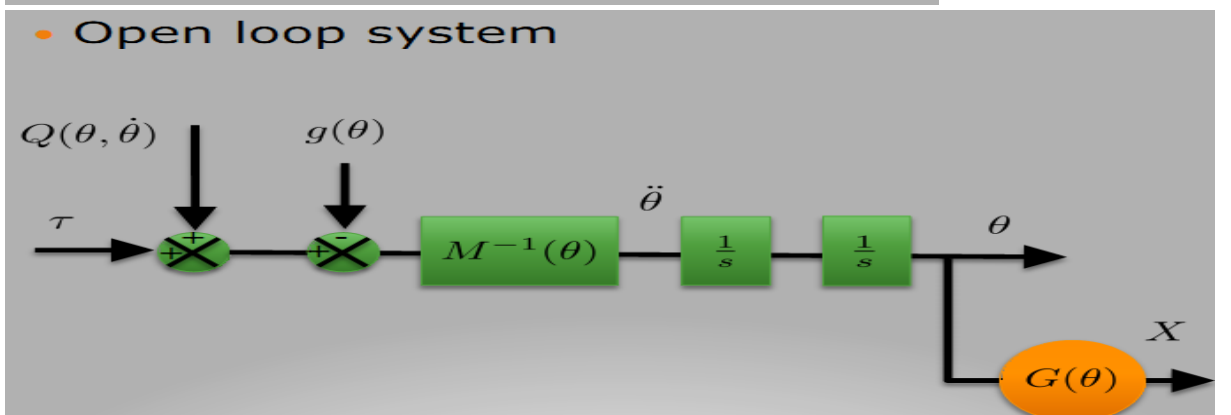
$$M(\theta)\ddot{\theta} = \tau - C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} - F_v\dot{\theta} - J^T(\theta)F - g(\theta)$$

Coriolis and centrifugal torques

Torques due to joint friction, only viscous friction in a simplified model, F_v is a positive definite (diagonal) matrix of viscous friction coefficients

$$C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + F_v\dot{\theta} = Q(\theta, \dot{\theta}) \quad \text{Perturbations}$$

$$\tau - J^T(\theta)F = M(\theta)\ddot{\theta} + Q(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + g(\theta)$$



Commande PID

Le modèle dynamique décrit un système de n équations différentielles du second ordre non linéaires et couplées, n étant le nombre d'articulations. Pourtant, dans une commande classique, qui est celle de la plupart des robots industriels actuels, le mécanisme est considéré comme un système linéaire et chacune de ses articulations est asservie par une commande décentralisée de type PID à gains constants. Ses avantages sont la facilité d'implantation et le faible coût en calcul. En contrepartie, la réponse temporelle du robot variant selon sa configuration, on constate des dépassements de consigne et une mauvaise précision de suivi dans les mouvements rapides. Dans beaucoup d'applications, ces inconvénients ne représentent pas un gros handicap. En pratique, le schéma classique d'une commande par PID d'un robot manipulateur est représenté sur la figure ci-dessous.

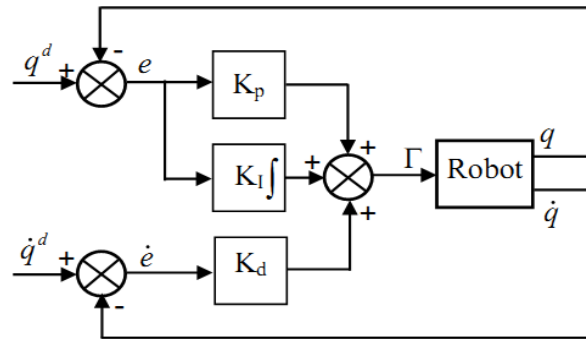


Figure. 7

La loi de commande du PID est donnée par :

$$\Gamma = K_p (q_d - q) + K_d (\dot{q}_d - \dot{q}) + K_I \int (q_d - q) dt$$

où $\dot{q}_d(t)$ et $q_d(t)$ désignent les vitesses et positions désirées dans l'espace articulaire et K_p , K_d et K_I sont des matrices diagonales définies positives, de dimension $(n \times n)$, d'éléments génériques respectivement les gains proportionnels K_{pj} , dérivés K_{dj} et intégraux K_{Ij} .

Le calcul des gains K_{pj} , K_{dj} et K_{Ij} est effectué en considérant le modèle de l'articulation j représenté par le système linéaire du deuxième ordre à coefficients constants suivant :

$$\Gamma_j = a_j \ddot{q}_j + F_{vj} \dot{q}_j + \gamma_j$$

Équation dans laquelle $a_j = A_{jj \max}$ désigne la valeur maximale de l'élément A_{jj} de la matrice d'inertie du robot, F_{vj} les frottements visqueux et γ_j représente un couple perturbateur.

En négligeant F_{vj} et γ_j la fonction de transfert du système en boucle fermée est donnée par :

$$\frac{q_j(s)}{q_{jd}(s)} = \frac{K_{dj}s^2 + K_{pj}s + K_{Ij}}{a_j s^3 + K_{dj}s^2 + K_{pj}s + K_{Ij}}$$

et l'équation caractéristique s'écrit donc :

$$\Delta(s) = a_j s^3 + K_{dj}s^2 + K_{pj}s + K_{Ij}$$

La solution la plus courante en robotique consiste à choisir les gains de manière à obtenir un pôle triple réel et négatif, ce qui donne la réponse la plus rapide possible sans oscillation. Par conséquent, l'équation caractéristique se factorise de la façon suivante :

$$\Delta(s) = a_j (s + \omega_j)^3$$

avec $\omega_j > 0$, et est choisi la plus grande possible, toutefois, cette pulsation ne devra pas être supérieure à la pulsation de résonance ω_{rj} du système mécanique pour ne pas le déstabiliser.

On en déduit finalement les gains :

$$\begin{cases} K_{pj} = 3a_j \omega_j^2 \\ K_{dj} = 3a_j \omega_j \\ K_{Ij} = a_j \omega_j^3 \end{cases}$$

REMARQUES.–

- ω_j est choisi le plus grand possible ; toutefois, cette pulsation ne devra pas être supérieure à la pulsation de résonance ω_{rj} correspondant aux modes de vibration mécanique afin de ne pas déstabiliser le système. Une valeur $\omega_j = \omega_{rj} / 2$ représente un bon compromis ;
- en l'absence de terme intégral, une erreur statique due à la force de gravité et aux frottements peut subsister autour de la position finale. En pratique, on désactive la composante intégrale lorsque l'erreur en position est très grande, le terme proportionnel étant suffisant ; on la désactive aussi lorsque l'erreur devient très petite pour éviter les oscillations que pourraient induire les frottements secs ;
- le terme d'anticipation $\mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}}^d$ de l'équation [142] permet de réduire les erreurs de suivi du mouvement désiré. En automatique classique, ce terme n'est pas couramment utilisé ;
- les performances d'une telle méthode sont d'autant plus acceptables que le rapport de réduction est important (augmentant ainsi la partie invariante de A_{jj}), que les vitesses sont faibles et que les gains proportionnels et dérivés sont grands [Samson 83].

Lorsque les effets de la gravité sont compensés, par construction mécanique comme pour le robot SCARA par exemple ou grâce à la commande, on montre qu'une loi de type PD est asymptotiquement stable pour une position désirée \mathbf{q}^d fixe [Arimoto 84]. La démonstration s'appuie sur la définition d'une fonction de Lyapunov ayant la forme suivante :

Commande PID dans l'espace opérationnel

Lorsque le mouvement est défini dans l'espace opérationnel, une des deux solutions suivantes peut être choisie pour réaliser la commande du système :

- on transforme le mouvement défini dans l'espace opérationnel en un mouvement dans l'espace articulaire, puis on met en œuvre la commande dans l'espace articulaire. Le signal d'erreur minimisé est alors exprimé dans l'espace articulaire ;
- on spécifie directement la commande dans l'espace opérationnel.

Pour une commande PID dans l'espace opérationnel, la loi de commande est obtenue en remplaçant \mathbf{q} par \mathbf{X} dans l'équation [142] et en multipliant l'erreur dans l'espace opérationnel par \mathbf{J}^T pour l'exprimer dans l'espace articulaire (Figure 19) :

$$\Gamma = \mathbf{J}^T \left[\mathbf{K}_p (\mathbf{X}^d - \mathbf{X}) + \mathbf{K}_d (\dot{\mathbf{X}}^d - \dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{K}_i \int_{t_0}^t (\mathbf{X}^d - \mathbf{X}) d\tau \right] \quad [154]$$

Pour décrire le mouvement désiré dans l'espace articulaire lorsque celui-ci est spécifié dans l'espace opérationnel, deux solutions sont possibles : soit seul le modèle géométrique inverse est utilisé, puis avec une procédure numérique, on dérive la position désirée pour obtenir la vitesse et l'accélération désirées ; soit on calcule les positions, vitesses et accélérations articulaires :

i) à partir du modèle géométrique inverse (MGI) pour les positions articulaires :

$$\mathbf{q}^d = \mathbf{MGI}(\mathbf{X}^d)$$

ii) à partir du modèle cinématique inverse dans les positions régulières :

$$\dot{\mathbf{q}}^d = \mathbf{J}(\mathbf{q}^d)^{-1} \dot{\mathbf{X}}^d$$

Dans les positions singulières ou pour les robots redondants, on remplace \mathbf{J}^{-1} par une inverse généralisée telle que la pseudo inverse ;

iii) à partir du modèle cinématique inverse du deuxième ordre :

$$\ddot{\mathbf{q}}^d = \mathbf{J}^{-1} (\ddot{\mathbf{X}}^d - \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}}^d)$$

avec :

$$\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}^d, \dot{\mathbf{q}}^d) = \frac{d}{dt} \mathbf{J}(\mathbf{q}^d)$$

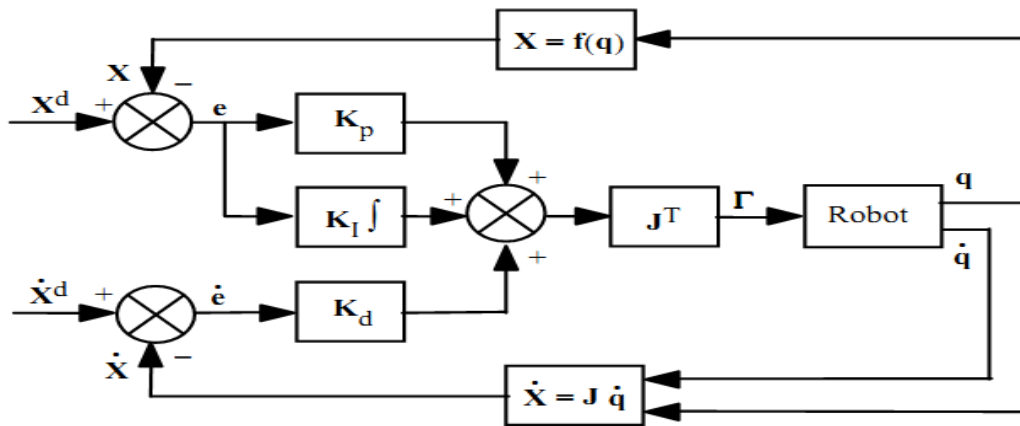


Figure 19. Schéma d'une commande PID dans l'espace opérationnel

II. Commande par mode glissant

La technique de la commande par mode glissant consiste à ramener la trajectoire d'état d'un système vers la surface de glissement et de la faire commuter à l'aide d'une logique de commutation appropriée jusqu'au point d'équilibre. Cette trajectoire est constituée de trois parties distinctes (figure 1):

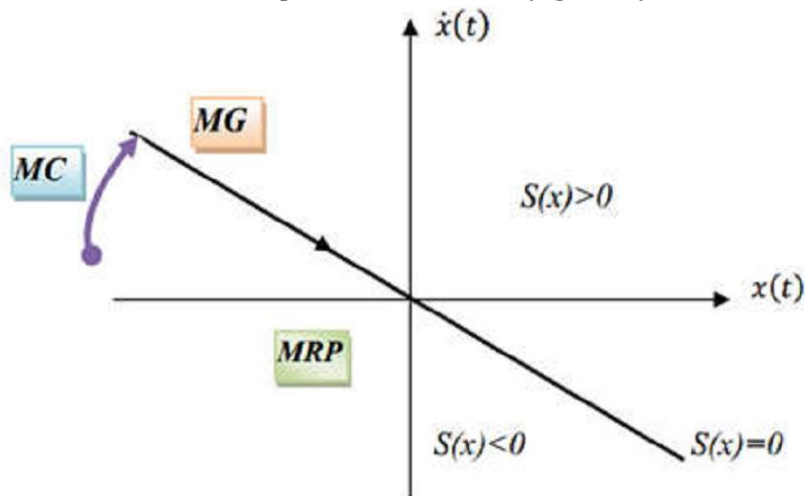


Figure 1. Les modes de trajectoire dans le plan de phase

Le mode de convergence (MC) : c'est le comportement durant lequel la variable à réguler se déplace à partir d'un état initial vers la surface de commutation.

Mode de glissement (MG) : C'est le comportement du système le long de la surface de commutation.

Le mode de régime permanent (MRP) : Il est nécessaire pour l'étude du comportement d'un système autour du point d'équilibre.

Conception de la commande par mode de glissement

La mise en œuvre de cette méthode de commande nécessite principalement trois étapes:

1 Choix de la surface de glissement:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, t) + g(x, t) u(t) \\ y = C^t x, \quad y \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Généralement, le choix du nombre des surfaces de glissement est égal à la dimension du vecteur de commande $u(t)$. Afin d'assurer la convergence d'une variable d'état x vers sa valeur de référence x_{ref} plusieurs travaux proposent la forme générale suivante:

$$S(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_x \right)^{r-1} e(x)$$

Avec : $e(x)$: L'écart de la variable à régler $e(x) = x_{ref} - x$.

λ_x : Une constante positive qui interprète la bande passante du contrôle désiré.

r : Degré relatif, égale au nombre de fois qu'il faut dériver la sortie pour faire apparaître la commande.

Pour $r = 1$, $S(x) = e(x)$

Pour $r = 2$, $S(x) = \lambda_x e(x) + \dot{e}(x)$

Pour $r = 3$, $S(x) = \lambda_x^2 e(x) + 2\lambda_x \dot{e}(x) + \ddot{e}(x)$

2. Condition d'existence et de convergence

Nous définissons une fonction de Lyapunov comme suit :

$$V(x) = \frac{1}{2} S^2(x) \quad \dot{V}(x) = S(x) \dot{S}(x)$$

D'où la condition de convergence exprimée par :

$$S(x) \dot{S}(x) < 0$$

3. Détermination de la loi de commande

$$U(t) = U_{eq} + U_n$$

U_{eq} : Correspond à la commande équivalente proposée par Filipov et Utkin, elle sert à maintenir la variable à contrôler sur la surface de glissement $S(x)$. La commande équivalente est déduite en considérant que la dérivée de la surface est nul $\dot{S}(x)=0$

La dérivée de la surface est :

$$\dot{S}(x) = \frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x} \{ f(x, t) + g(x, t) U_{eq}(t) \} + \frac{\partial S}{\partial x} \{ g(x, t) U_n \}$$

Durant le mode de glissement et le régime permanent, la surface est nulle et par conséquent, sa dérivée et la partie discontinue sont aussi nulles. D'où on déduit l'expression de la commande équivalente.

$$\begin{cases} U_{eq}(t) = \left\{ \frac{\partial S}{\partial x} g(x, t) \right\}^{-1} \cdot \left\{ - \frac{\partial S}{\partial x} f(x, t) \right\} \\ U_n = 0 \end{cases}$$

Avec la condition d'existence :

$$\left\{ \frac{\partial S}{\partial x} g(x, t) \right\}^{-1} \neq 0$$

Commande des robots

U_n : est un terme introduit pour satisfaire la condition de convergence $S(x)\dot{S}(x) < 0$

Durant le mode de convergence et en remplaçant la commande équivalente par son expression dans (III.8), on obtient la nouvelle expression de la dérivée de la surface :

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S}{\partial x} \{ g(x, t) U_n \}$$

Le problème revient à trouver U_n tel quel :

$$S(x) \dot{S}(x) = S(x) \frac{\partial S}{\partial x} \{ g(x, t) U_n \} < 0$$

La solution la plus simple est de choisir U_n sous la forme de relais (Figure III.2). Dans ce cas, la commande s'écrit comme suit :

$$U_n = K \text{sign}(S(x))$$

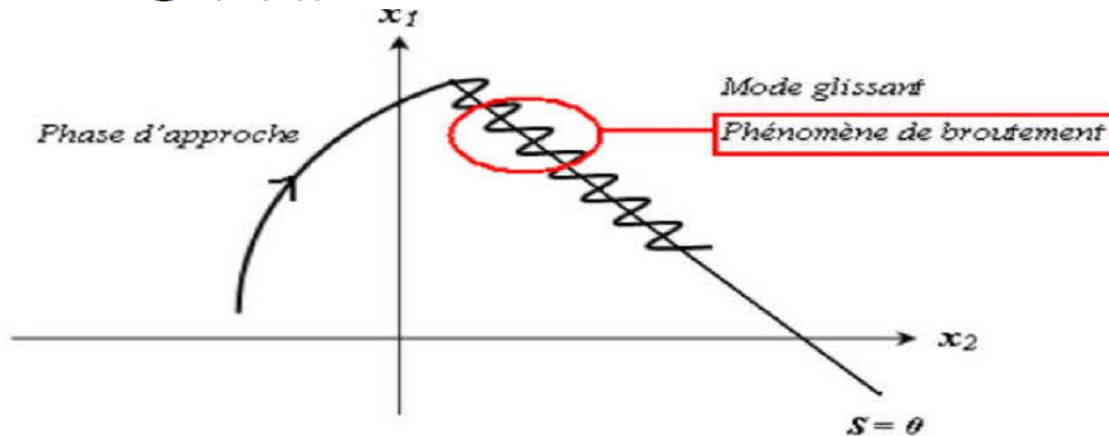


Figure III.3: Illustration du phénomène de broutement.

Application: Commande par mode glissant de robot

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F_v(\dot{q}) = \tau$$

The model equation (0.2.2) can be written in state space form with state components: $x_1 = q, x_2 = \dot{q}$ ($x = (x_1^T, x_2^T)^T$) and measurable output $y = q = x_1$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -M^{-1}(x_1) [C(x_1, x_2)x_2 + G(x_1) - \tau] \\ y = x_1 \end{cases}$$

Exemple: robot cartésien à 2 segments

$$\begin{aligned} (m_{\ell_1} + m_{m_2} + k_{r1}^2 I_{m_1} + m_{\ell_2}) \ddot{d}_1 + (m_{\ell_1} + m_{m_2} + m_{\ell_2}) g &= \tau_1 \\ (m_{\ell_2} + k_{r2}^2 I_{m_2}) \ddot{d}_2 &= \tau_2 \end{aligned}$$

• La matrice d'inertie est:

$$B = \begin{bmatrix} m_{\ell_1} + m_{m_2} + k_{r1}^2 I_{m_1} + m_{\ell_2} & 0 \\ 0 & m_{\ell_2} + k_{r2}^2 I_{m_2} \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial d_1} \\ \frac{\partial U}{\partial d_2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} (m_{\ell_1} + m_{m_2} + m_{\ell_2}) g \\ 0 \end{bmatrix}$$