Université de Mohammed Boudiaf, M'sila — Faculté des mathématiques
L2 (S3) : 2020/2021 — Mr. Bougherara Brahim

Module : **Topologie des espaces métriques**

Sérier 01 avec solutions

Exercice 1. Est ce que d définit une distance sur $\mathbb{R}$ dans tous les cas suivants :

1. $|d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. $|d(x,y) = |x^2 - y^2|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
3. $d(x,y) = |\sin x - \sin y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit d une distance sur E. Posons $\delta = \frac{d}{1+d}$. Montrer que δ définit une distance sur E.

Exercice 3. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application injective et soit d une distance sur F. On pose

$$\delta(x,y) := d(f(x), f(y)), \quad \forall x, y \in E.$$

Montrer que δ est une distance sur E.

Exercice 4. Soit (E,d) un espace métrique. Soit $\varphi : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application croissante telle que

$$\varphi(0) = 0, \ \forall t > 0 : \varphi(t) > 0, \quad \forall t, s \geq 0 : \varphi(t+s) \leq \varphi(t) + \varphi(s), \ .$$

1. Démontrer que l'application $\varphi \circ d$ définit une distance sur E.
2. Déduire que les applications suivantes définissent des distances sur $\mathbb{R}$:

$$d^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1, \qquad \ln(1+d), \qquad \min\{1, d\}.$$

Exercice 5 (Très facile)**.** *Montrer que* $\boxed{\overline{B}(a,r) = B(a,r) \cup S(a,r).}$ $\boxed{(a,r) = \overline{B}(a,r) \setminus B(a,r).}$

Exercice 6. *Soit (E,d) un espace métrique. Calculer la boule ouverte, fermé et la sphère (de centre a et de rayon $r > 0$) par rapport aux distances suivantes.*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & si \quad x \neq y \\ 0 & si \quad x = y \end{cases}, \quad \delta(x,y) = \ln(1 + d(x,y)), \quad \delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}.$$

Exercice 7. *Soit A un ensemble non vide d'un espace métrique (E,d). Montrer que*

$$\forall x, y \in E : |d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y). \tag{0.1}$$

Exercice 8. *Soit (E,d) un espace métrique, où d est la distance discrète.*

1. *Calculer la boule ouverte et la boule fermé de centre de centre a et de rayon 1.*
2. *Calculer l'adhérence de $B(a,1)$.*
3. *Conclure.*