حلول التمارين

Exercice 01 : Vérifions si d est une distance sur $\mathbb{R}$ ou non dans les cas suivants :

1 $d(x,y) = |\mathrm{Arctg}\, x - \mathrm{Arctg}\, y|$

On a pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$:

* $\boxed{d(x,y)=0} \Leftrightarrow |\mathrm{Arctg}\, x - \mathrm{Arctg}\, y| = 0$

$\Leftrightarrow \mathrm{Arctg}\, x = \mathrm{Arctg}\, y$

$\Leftrightarrow \boxed{x = y}$ car $x \mapsto \mathrm{Arctg}$ est injective (croissante)

* $\boxed{d(x,y)} = |\mathrm{Arctg}\, x - \mathrm{Arctg}\, y| = |\mathrm{Arctg}\, y - \mathrm{Arctg}\, x| = \boxed{d(y,x)}$

* $\boxed{d(x,y)} = |\mathrm{Arctg}\, x - \mathrm{Arctg}\, y| = |\mathrm{Arctg}\, x - \mathrm{Arctg}\, z + \mathrm{Arctg}\, z - \mathrm{Arctg}\, y|$

$\leqslant |\mathrm{Arctg}\, x - \mathrm{Arctg}\, z| + |\mathrm{Arctg}\, z - \mathrm{Arctg}\, y|$

$= \boxed{d(x,z) + d(z,y)}$

Donc d est une distance sur $\mathbb{R}$.

2 $d(x,y) = |x^2 - y^2|$.

On a $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x^2-y^2| = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2$

pour $x = 1$, $y = -1$, on a $d(x,y) = 0$ mais $x \neq y$

d'où $d(x,y) = 0 \not\Leftrightarrow x = y$ D'où d n'est pas distance

3 $d(x,y) = |\sin x - \sin y|$

La même chose ici : $d(x,y)=0 \not\Leftrightarrow x=y$

Car $x \longmapsto \sin x$ n'est pas injective

il suffit de prendre : $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 2\pi$

alors $d(x,y) = 0$ mais $x \neq y$.

Exercice 02 : On a (E, d) est un espace métrique.

$$\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

Montrons que δ est une distance sur E.

Soient $x, y, z \in E$. On a :

* $\boxed{\delta(x,y)=0} \Longleftrightarrow \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0$

$$\Longleftrightarrow d(x,y)=0 \xLeftrightarrow{d \text{ distance}} \boxed{x=y}$$

* $\delta(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \dfrac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = \delta(y,x)$

* $\boxed{\delta(x,y)} = \dfrac{1+d(x,y)-1}{1+d(x,y)} = 1 - \dfrac{1}{1+d(x,y)}$

$$\leqslant 1 - \frac{1}{1+d(x,z)+d(z,y)} = \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}$$

$$= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+\underbrace{d(z,y)}_{\geqslant 0}} + \frac{d(z,y)}{1+\underbrace{d(x,z)}_{\geqslant 0}+d(z,y)}$$

$$\leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} = \boxed{\delta(x,z)+d(z,y)}$$

D'où δ est une distance sur E.

Exercice 03

(F, d) est un e.m. $f : E \longrightarrow F$ app injective.

$$\delta(x,y) = d(f(x), f(y))$$

Montrons que δ est une distance sur E

Soient $x, y, z \in E$. On a

$* \ \boxed{\delta(x,y)=0} \Longleftrightarrow d(f(x), f(y)) = 0$

$\overset{d \text{ dist}}{\Longleftrightarrow} f(x) = f(y)$

$\overset{f \text{ inj}}{\Longleftrightarrow} \boxed{x = y}$

$* \ \delta(x,y) = \delta(y,x)$ (évident)

$* \ \boxed{\delta(x,y)} = d(f(x), f(y))$

$\leq d(f(x), f(z)) + d(f(z), f(y)) = \boxed{\delta(x,z) + \delta(z,y)}$

Exercice 04

: (E, d) est un e.m. $\varphi : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varphi(0) = 0$, $\forall t > 0 : \varphi(t) > 0$, φ est croissante

$\forall t, s \in [0, +\infty[: \varphi(t+s) \leq \varphi(t) + \varphi(s)$

① Montrons que $\delta = \varphi \circ d$ est une distance sur E.

Soient $x, y, z \in E$. On a :

$*\ \delta(x,y) = \varphi(d(x,y))$

On a : Si $\boxed{x=y}$ alors $d(x,y)=0$ et donc $\varphi(d(x,y))=0$

d'où $\boxed{\delta(x,y)=0}$

Si $\boxed{x\neq y}$ alors $d(x,y)>0$ et donc $\varphi(d(x,y))>0$

d'où $\boxed{\delta(x,y)\neq 0}$

Donc $\boxed{\delta(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y}$

$*\ \delta(x,y)=\varphi(d(x,y))=\varphi(d(y,x))=\delta(y,x)$

$*$ On a comme d est une distance alors :

$$d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$$

et comme φ est croissante alors :

$$\varphi(d(x,y)) \leq \varphi(\underbrace{d(x,z)}_{t}+\underbrace{d(z,y)}_{s})$$

$$\leq \varphi(d(x,z)) + \varphi(d(z,y))$$

D'où $\boxed{\delta(x,y) \leq \delta(x,z)+\delta(z,y)}$

(2) Il suffit de vérifier que les application t^α, $\ln(1+t)$, $\min\{1,t\}$ satisfaient les même propriétés de φ

$*$ pour $\varphi(t)=t^\alpha$. On a $\varphi(0)=0$, $\varphi(t)>0\ \forall t>0$

et on a $\forall t>0$: $\varphi'(t)=\alpha t^{\alpha-1}>0$ donc φ est croissante

et on a $\varphi(t+s)=(t+s)^\alpha \leq t^\alpha+s^\alpha$.

Car pour $s \geq 0$ fixé on a $t \longmapsto g(t) = (t+s)^\alpha - t^\alpha - s^\alpha$ est (5

décroissante $\left(g'(t) = \alpha\left[(t+s)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1} \right] \leq 0 \right)$ pour $t > 0$

d'où $g(t) \leq g(0) = 0$, i.e. $(t+s)^\alpha \leq t^\alpha + s^\alpha$.

* Pour $\varphi(t) = \ln(1+t)$, on a $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) > 0$, $\forall t > 0$

et on a $\varphi'(t) = \dfrac{1}{1+t} > 0$ $\forall t > 0$, donc φ est $\nearrow$

et on a pour $t, s \geq 0$

$$\varphi(t+s) = \ln(1+t+s) \leq \ln(1+t+s+\underbrace{ts}_{\geq 0})$$
$$= \ln\left((1+t)(1+s)\right)$$
$$= \ln(1+t) + \ln(1+s)$$
$$= \boxed{\varphi(t) + \varphi(s)}$$

* Pour $\varphi(t) = \min\{1, t\}$. On a

- $\varphi(0) = \min\{1, 0\} = 0$
- $\forall t > 0$: $\varphi(t) = \min\{1, t\} > 0$
- $\forall\, 0 < t < s$: $\min\{1, t\} \leq \min\{1, s\}$. d'où $\varphi(t) \leq \varphi(s)$

Donc $\varphi \nearrow$

- Pour tout $t, s \geq 0$. On a

$$\boxed{\varphi(t) + \varphi(s)} = \min\{1, t\} + \min\{1, s\}$$
$$= \min\left(\{1, t\} + \{1, s\}\right) \quad \left(\min(A+B) = \min A + \min B\right)$$
$$= \min\{\underset{\geq 1}{2}, \underset{\geq 1}{1+t}, \underset{\geq 1}{1+s}, t+s\}$$
$$\geq \min\{1, t+s\} = \boxed{\varphi(t+s)}$$

Exercice 05 : $\overline{B}(a,r) \overset{??}{=} B(a,r) \cup S(a,r)$

On a $\boxed{x \in \overline{B}(a,r)} \iff d(a,x) \leq r$

$\iff d(a,x) < r \vee d(a,x) = r$

$\iff x \in B(a,r) \vee x \in S(a,r)$

$\iff \boxed{x \in B(a,r) \cup S(a,r)}$

Exercice 06 : (E,d) est un e.m.

Calculons $B(a,r)$, $\overline{B}(a,r)$ et $S(a,r)$, $a \in E$, $r > 0$

$\boxed{1}$ $d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$

- $B(a,r) = \{x \in E : d(x,y) < r\}$

On distingue 2 cas :

* si $r \leq 1$ alors $B(a,r) = \{x \in E : d(a,x) = 0\} = \boxed{\{a\}}$

* si $r > 1$ alors $B(a,r) = \{x \in E : d(a,x) = 0 \vee d(a,x) = 1\}$

$= \boxed{E}$

- $\overline{B}(a,r) = \{x \in E : d(a,x) \leq r\}$

$= \begin{cases} \{x \in E : d(a,x) = 0\} & \text{si } r < 1 \\ \{x \in E : d(a,x) = 0 \vee d(a,x) = 1\} & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$

$= \begin{cases} \{a\} & \text{si } r < 1 \\ E & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$

- $S(a,r) = \{x \in E : d(a,x) = r\} = \begin{cases} \{a\} & \text{si } r = 0 \\ E \setminus \{a\} & \text{si } r = 1 \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$

$\boxed{2}$ $\delta(x,y) = \ln(1+d(x,y))$

$$B_\delta(a,r) := \{x \in E : \ln(1+d(a,x)) < r\}$$
$$= \{x \in E : 1+d(a,x) < e^r\}$$
$$= \{x \in E : d(a,x) < e^r - 1\}$$
$$= B_d(a, e^r - 1)$$

De la même manière, on obtient $\boxed{\overline{B}_\delta(a,r) = \overline{B}_d(a, e^r - 1)}$

Pour la sphère, on a $S_\delta(a,r) = \overline{B}_\delta(a,r) - B_\delta(a,r)$

$$= \boxed{S_d(a, e^r - 1)}$$

$\boxed{3}$ $\delta(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, $r > 0$

$$B_\delta(a,r) = \left\{x \in E : \frac{d(a,x)}{1+d(a,x)} < r\right\}$$
$$= \{x \in E : d(a,x) < r + d(a,x) \cdot r\}$$
$$= \{x \in E : (1-r)\, d(a,x) < r\}$$

Si $r < 1$ alors $B_\delta(a,r) = \left\{x \in E : d(a,x) < \frac{r}{1-r}\right\}$

$$= B_d\left(a, \frac{r}{1-r}\right)$$

Si $r \geq 1$ alors $B_\delta(a,r) = \{x \in E : 0 < r\} = E$

De la même manière, on montre que :

$$\overline{B}_\delta(a,r) = \begin{cases} \overline{B}_d\left(a, \frac{r}{r-1}\right) & \text{si } r < 1 \\ E & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$$

$$S_\delta(a,r) = \overline{B}_\delta(a,r) \setminus B_d(a,r) = \begin{cases} S_d\left(a, \frac{r}{r-1}\right) & \text{si } r < 1 \\ \emptyset & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 07 : Montrons que :

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y) \quad \forall x,y \in E.$$

Rappelons que $d(x,A) = \inf\limits_{z \in A} d(x,z)$.

On a $\forall x,y \in E$, $\forall z \in A$:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

d'où $\inf\limits_{z \in A} d(x,z) \leq d(x,y) + \inf\limits_{z \in A} d(y,z)$

Donc $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A)$

d'où $d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$

en changeant les rôles entre x et y, on obtient

$$d(y,A) - d(x,A) \leq d(x,y)$$

Donc $\boxed{|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)}$

Exercice 08 (E,d) est un e.m, d est la distance discrète : $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x=0 \\ 1 & \text{Si } x \neq y \end{cases}$

1) D'après l'exercice , on a

$$B(a,1) = \{a\}, \quad \bar{B}(a,1) = E$$

2) On a $\overline{B(a,1)} := \{x \in E : d(x, B(a,1)) = 0\}$

$$= \{x \in E : d(x, \{a\}) = 0\}$$

$$= \{x \in E : d(x,a) = 0\}$$

$$= \{a\}$$

3) D'après les question 1) et 2), On conclut que en général $\overline{B}(a,r) \neq \overline{B(a,r)}$

(On a $\overline{B(a,r)} \subset \overline{B}(a,r)$)