Faculté des Mathématiques de l'Informatique
Département des mathématiques
Licence 3ième année
Module: Optimisation sans contraintes (2020/2021)

Cours 2: Fonctions convexes

Déftnition (*Fonction convexe*) Soit C un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$. On dit que la fonction $f : C \to \mathbb{R}$ convexe si

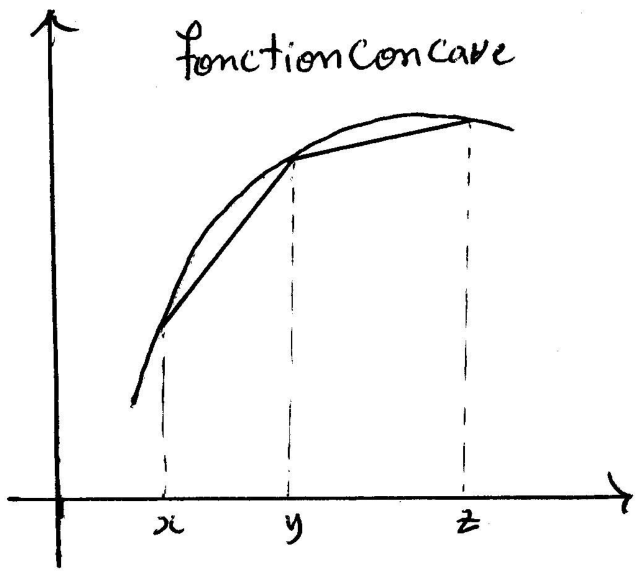
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \qquad \forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1].$$

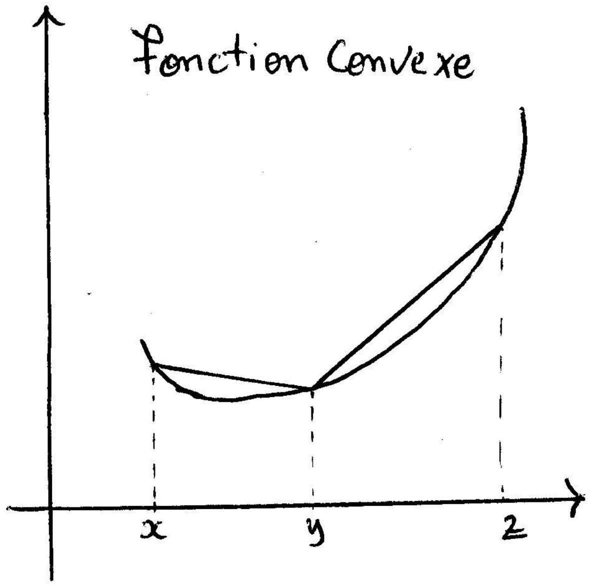
Définition (*Fonction concave*). Avec les même données de la définition précédente; f est **concave** sur C si

$$-f \text{ est convexe sur } C.$$

Ou encore, f est **concave** sur C si

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \qquad \forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1].$$





On remarque aussi que:

f est convexe sur C | si tout arc de la courbe de f est sous la corde correspondante.

f est concave sur C | si tout arc de la courbe de f est au dessus la corde correspondante.

Exemple.
1) $f(x) = ax + b$ est une fonction convexe. En effet,

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= a(\lambda x + (1-\lambda)y) + b \\ &= \lambda ax + (1-\lambda)ay + \lambda b + (1-\lambda)b \\ &= \lambda(ax+b) + (1-\lambda)(ay+b) \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \end{aligned}$$

2) $f(x) = x^2$ est une fonction convexe. En effet, pour $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (x-y)^2 \quad \geq \quad & 0 \overset{\lambda(\lambda-1)\leq 0}{\Leftrightarrow} \lambda(\lambda-1)(x-y)^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda(\lambda-1)x^2 - 2\lambda(\lambda-1)xy + \lambda(\lambda-1)y^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\lambda^2 - \lambda\right)x^2 - 2\lambda(\lambda-1)xy + \left((1-\lambda)^2 - (1-\lambda)\right)y^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda^2 x^2 - 2\lambda(\lambda-1)xy + (1-\lambda)^2 y^2 \leq \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 \\ \Leftrightarrow \quad & (\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \leq \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 \\ \Leftrightarrow \quad & f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \end{aligned}$$

3) $f(x) = |x|$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. En effet,

$$|\lambda x + (1-\lambda)y| \leq \lambda|x| + (1-\lambda)|y|.$$

4) $f(x) = \ln(x)$ est une fonction concave sur $]0, +\infty[$.

Définition (*Fonctions strictement convexe*)
1) On dit que la fonction $f : C \to \mathbb{R}$ *strictement convexe* si

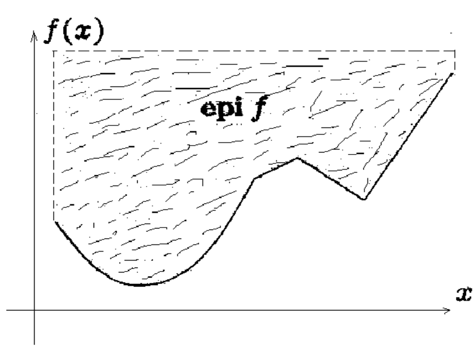
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \qquad \forall x, y \in C, \forall \lambda \in \left]0, 1\right[.$$

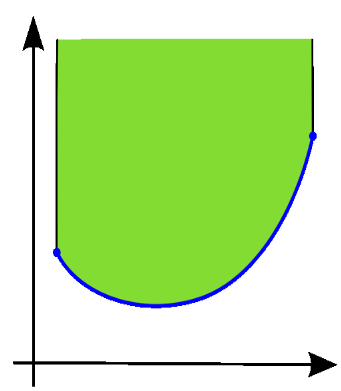
2) On dit que la fonction $f : C \to \mathbb{R}$ *strictement concave* si

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \qquad \forall x, y \in C, \forall \lambda \in \left]0, 1\right[.$$

Définition. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$. L'épigraphe de $f : C \to \mathbb{R}$ est la partie de l'espace produit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ qui se trouve au-dessus de son graphe

$$epi(f) = \{(x,t) \in C \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\}.$$





Proposition . *Soient C un convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction.*
Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
1) f est convexe sur C.
2) L'épigraphe de f est un ensemble convexe dans $\mathbb{R}^n$.

Preuve.
1) $\Rightarrow$ 2) : Soit f une fonction convexe sur C. On va montrer que $epi\,(f)$ est convexe. Soient

$$(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in epi\,(f) \text{ et } 0 \leq \lambda \leq 1$$

alors

$$\lambda(x_1, t_1) + (1-\lambda)(x_2, t_2) = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2),$$

comme f est convexe on trouve

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &\leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \\ &\leq \lambda t_1 + (1-\lambda) t_2. \end{aligned}$$

Donc, on bien montrer que $epi\,(f)$ est convexe.
2) $\Rightarrow$ 1) : Maintenant, soient $x_1, x_2 \in C$ et $0 \leq \lambda \leq 1$. On sait que les couples

$$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \in epi\,(f),$$

alors la combinaison convexe reste dans $epi\,(f)$, c'est à dire

$$\lambda(x_1, f(x_1)) + (1-\lambda)(x_2, f(x_2)) \in epi\,(f)$$

ce qui imlique que

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)) \in epi\,(f)$$

d'où

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Donc f est convexe.

Proposition (*Opérations sur les fonctions convexes*).
(i) Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de fonctions convexes sur C. On définie la borne supérieure:

$$h(x) = \sup_{i \in I} f(x) \text{ pour tout } x \in C;$$

alors, h est une fonction convexe sur C.
(ii) Soient $\alpha \geq 0$ et f une fonction convexe. Alors αf est convexe.
(iii) La somme de deux fonctions convexes est convexe.
Preuve. TD
Exercice. Soit A un ensemble de $\mathbb{R}^n$ montrer que

A est convexe **si et seulement si** 1_A est une fonction convexe,

où

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \neq A \end{cases}$$

Convexité d'une fonction d'une seule variable

Cette section est réservé à l'étude de convexité de fonctions d'une seule variable. Les résultats énnonés ici sont utiles pour continuer l'étude des fonctions de plusieurs variables. Considérons toujours une fonction f définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, les intervalles, comme on a noté précédemment, sont les ensembles convexes de $\mathbb{R}$.

Proposition (**Critère de pentes croissantes**) : *Soient* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction définie sur* I*. Alors,* $(1) \Leftrightarrow (2)$ *où*
(1) *La fonction* f *est convexe sur* I
(2) *Pour tous* $x, y, z \in I : x < y < z \Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$.

Preuve. $(1) \Rightarrow (2)$: Soient $x, y, z \in I : x < y < z$. Comme $y \in]x, z[$ on peut écrire y comme combinaison convexe de x et z,

$$\exists \lambda \in]0, 1[: y = \lambda x + (1 - \lambda) z.$$

La fonction f est convexe sur I, ce qui entraine que

$$\begin{aligned} f(y) &= f(\lambda x + (1-\lambda) z) \\ &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z), \end{aligned}$$

ajoutons le terme $\lambda f(y)$ à chaque membre

$$\lambda f(y) + f(y) \leq \lambda f(y) + \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z)$$

donc

$$\lambda f(y) - \lambda f(x) \leq \lambda f(y) - f(y) + (1-\lambda) f(z)$$

alors

$$\lambda (f(y) - f(x)) \leq (1-\lambda)(f(z) - f(y))$$

ce qui imlique

$$\frac{f(y) - f(x)}{(1-\lambda)} \leq \frac{f(z) - f(y)}{\lambda} \tag{1}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} y &= \lambda x + (1-\lambda) z = z + \lambda (x - z) \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{y - z}{x - z} \text{ et } 1 - \lambda = \frac{y - x}{z - x} \end{aligned}$$

alors la formule (1) donne

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - x) \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}(z - x)$$

finalement, on trouve

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

$(2) \Rightarrow (1)$: Soient $x, z \in I$ avec $x < z$ (le cas $x = z$ est trivial). Soit $\lambda \in]0, 1[$, on pose

$$y = \lambda x + (1-\lambda) z, \text{ c'est à dire } y \in]x, z[; \quad (x < y < z)$$

D'après l'hypothèse on a

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Ce qui imlique

$$\frac{z-x}{y-x}\left(f(y)-f(x)\right) \leq \frac{z-x}{z-y}\left(f(z)-f(y)\right)$$

donc

$$\frac{1}{1-\lambda}\left(f(y)-f(x)\right) \leq \frac{1}{\lambda}\left(f(z)-f(y)\right)$$

alors

$$\lambda\left(f(y)-f(x)\right) \leq (1-\lambda)\left(f(z)-f(y)\right)$$

finalement, on a

$$f(y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z)$$

L'inégalité est triviale lorsque $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. ■

Proposition *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I.*
Pour tout $a \in I$, on pose $\varphi_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ avec $x \in I_{-\{a\}}$.
Alors, (1) $\Leftrightarrow$ (2) où
(1) La fonction f est convexe sur I
(2) $\forall a \in I : \varphi_a$ est croissante sur $I_{-\{a\}}$.

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) : Soient $x, y \in I_{-\{a\}}$ tel que $x < y\ (x \neq y \neq a)$. On veut montrer que

$$\varphi_a(x) \leq \varphi_a(y).$$

On distingue trois cas:

♦ $\underline{x < a < y}$: la proposition de pentes croissantes donne

$$\begin{aligned} \frac{f(a)-f(x)}{a-x} &\leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \\ &\Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \end{aligned}$$

alors

$$\varphi_a(x) \leq \varphi_a(y).$$

♦ $\underline{x < y < a}$: ce qui imlique : $y = \lambda x + (1-\lambda) a$ avec $\lambda \in]0,1[$.
La fonction f est convexe, donc

$$\begin{aligned} f(y) &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(a) \\ &\leq f(a) + \lambda\left(f(x) - f(a)\right). \end{aligned}$$

On sait que $\lambda = \frac{y-a}{x-a}$

$$\begin{aligned} f(y) - f(a) &\leq \frac{y-a}{x-a}\left(f(x)-f(a)\right) \\ \overset{(y-a<0)}{\Rightarrow} \frac{f(y)-f(a)}{y-a} &\geq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\varphi_a(x) \leq \varphi_a(y).$$

♦ $\overline{a < x < y}$: Même argument. Finalement φ_a est croissante sur $I_{-\{a\}}$.

$\overline{(2) \Rightarrow (1)}$: Soient $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$. Comme φ_y est croissante sur $I_{-\{y\}}$ on a

$$\varphi_y(x) \leq \varphi_y(z),$$

ce qui imlique

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} &\leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \\ &\Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \end{aligned}$$

d'après la proposition de pentes croissantes, f est convexe sur I. ■

Remarque. $f : I \to \mathbb{R}$ *est concave* $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in I : x < y < z \Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$
$\Leftrightarrow \forall a \in I,\ \varphi_a$ *est décroissante sur* $I_{-\{a\}}$.

Le théorème suivant donne la relation de convexité et la dérivabilité de f.

Théorème *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors,*
f est convexe sur $I \Leftrightarrow f'$ est croissante sur I

Preuve.

$\Rightarrow$) Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. La fonction f est dérivable sur I alors

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \overset{\geq}{\to} a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \overset{\geq}{\to} a} \varphi_a(x) \\ f'(b) &= \lim_{x \overset{\leq}{\to} b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{x \overset{\leq}{\to} b} \varphi_b(x) \end{aligned}$$

Les fonction φ_a, φ_b sont croissantes; alors

$$\begin{aligned} a &< x < b \Rightarrow \begin{cases} \varphi_a(x) \leq \varphi_a(b) \\ \varphi_b(x) \geq \varphi_b(a) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \overset{\geq}{\to} a} \varphi_a(x) \leq \varphi_a(b) \\ \lim_{x \overset{\leq}{\to} b} \varphi_b(x) \geq \varphi_b(a) \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui entraine que

$$f'(a) \leq \varphi_a(b) \text{ et } f'(b) \geq \varphi_b(a)$$

Le fait que $\varphi_a(b) = \varphi_b(a)$, ca nous implique

$$f'(a) \leq f'(b).$$

$\Leftarrow$) : Soient $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$. Le théorème des accroissement finis appliqués à f sur $[a, b]$ et $[b, c]$ donne

$$\begin{aligned} \exists \alpha &\in\ ]a, b[: f(b) - f(a) = f'(\alpha)(b - a) \\ \exists \beta &\in\ ]b, c[: f(c) - f(b) = f'(\beta)(c - b) \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f^{'}(\alpha) \text{ et } \frac{f(c)-f(b)}{c-b}=f^{'}(\beta)$$

Or, $f^{'}$ est croissante et $\alpha<\beta$, on a

$$f^{'}(\alpha)\leq f^{'}(\beta);$$

c'est à dire

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq\frac{f(c)-f(b)}{c-b};$$

la proposition de pentes croissantes implique la convexité de f. ■

Remarque:| *$f: I\to\mathbb{R}$ est concave $\Leftrightarrow$ $f^{'}$ est décroissante sur I.*
Une autre caractérisation de la convexité de fonction d'une seule variable; on a le résultat suivant.

Corollaire:| *$f: I\to\mathbb{R}$ est convexe sur $I\Leftrightarrow$ $\forall x,y\in I: f(x)\geq f(y)+(x-y)f^{'}(y)$*
Preuve. Soient $x,y\in I$. Sans perte de généralité; on peut sopposer que $x<y$. On prend $t\in I$ tel que

$$x<y<t.$$

La proposition de pentes croissantes impliquela proposition de pentes croissantes implique

$$\begin{aligned}
\frac{f(y)-f(x)}{y-x} &\leq \frac{f(t)-f(y)}{t-y}\\
&\Rightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y}\leq\frac{f(t)-f(y)}{t-y}\\
\overset{(x-y)<0}{\Rightarrow} f(x) &\geq f(y)+(x-y)\frac{f(t)-f(y)}{t-y}
\end{aligned}$$

On fait $t\overset{>}{\to}y$ on trouve

$$f(x)\geq f(y)+(x-y)f^{'}(y). \quad ■$$

Finalement, on donne le résultat très intéressant qui établir la relation entre la convexité et deuxième dérivée de f.

Théorème| *Soit $f: I\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I. Alors,*
f est convexe sur $I\Leftrightarrow$ $f^{''}(x)\geq0$ pour tout $x\in I$

Preuve. D'après ce qu'il précède

$$\begin{aligned}
f \text{ est convexe sur } I &\Leftrightarrow f^{'} \textit{ est croissante sur } I\\
&\Leftrightarrow f^{''}(x)\geq 0 \textit{ pour tout } x\in I. \quad ■
\end{aligned}$$

On termine ce paragraphe par un résultat sur la concavité de f.

Remarque:| *$f: I\to\mathbb{R}$ est concave $\Leftrightarrow\forall x,y\in I: f(x)\leq f(y)+(x-y)f^{'}(y)$*
$\Leftrightarrow f^{''}(x)\leq 0$ pour tout $x\in I$.