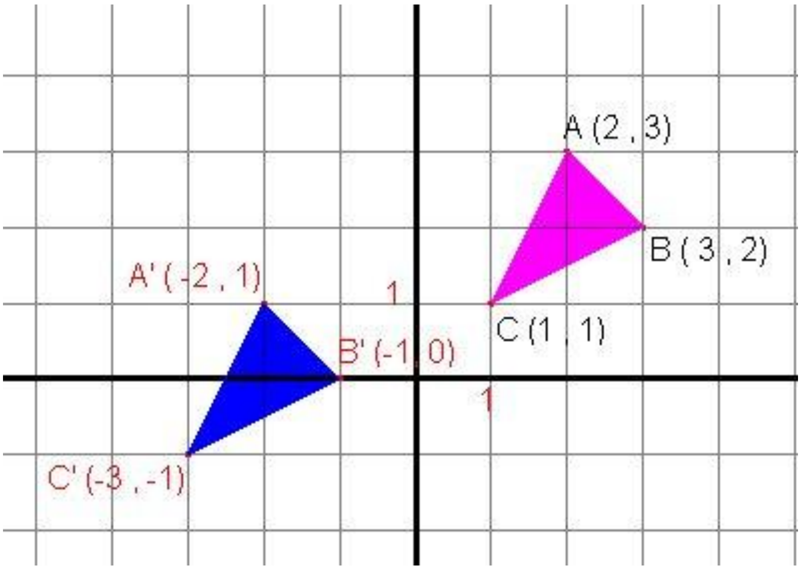
Ch1 : Les transformations géométriques dans le plan cartésien

Les **transformations géométriques** permettent d'associer à toute figure initiale (triangle rose) , une figure image (figure finale = triangle bleu).



Il y a quatre principales transformations géométriques:

-la translation : on déplace la figure initiale vers le haut, le bas, à droite ou à gauche et on garde les mêmes mesures.

-la rotation : on tourne la figure initiale dans le sens horaire ou antihoraire par rapport à un point et on garde les mêmes mesures.

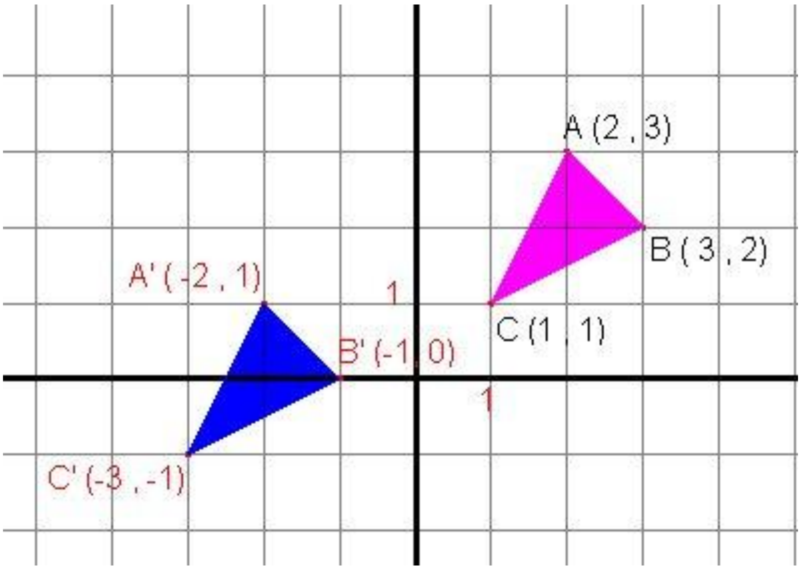
-la réflexion; (La **réflexion** (ou symétrie) est une transformation qui génère une image renversée par rapport à un axe de réflexion)

-l'homothétie. (**L'homothétie** est une transformation qui permet d'agrandir ou de réduire une figure).

Une transformation géométrique qui ne modifie pas les mesures d'une figure est une **isométrie**. La translation, la rotation et la réflexion sont toutes des isométries.

Une transformation géométrique qui associent des figures dites semblables est appelée une **similitude**. L'homothétie est une similitude.

1- Exemple de translation : On translate le triangle rose et on obtient alors le triangle bleu.



On compare les coordonnées des sommets homologues :

A et A': $(2,3)$ et $(-2,1)$; B et B': $(3,2)$ et $(-1,0)$; C et C': $(1,1)$ et $(-3,-1)$.

On ne remarque pas de multiplication des coordonnées, pas de changement d'ordre et pas de changement de signe significatif. Il ne reste que la translation comme transformation admissible.

On trouve la règle :

La valeur en x du point A est passée de 2 à -2, c'est-à-dire une différence de 4.
La valeur en x du point B est passée de 3 à -1, c'est-à-dire une différence de 4.
La valeur en x du point C est passée de 1 à -3, c'est-à-dire une différence de 4.

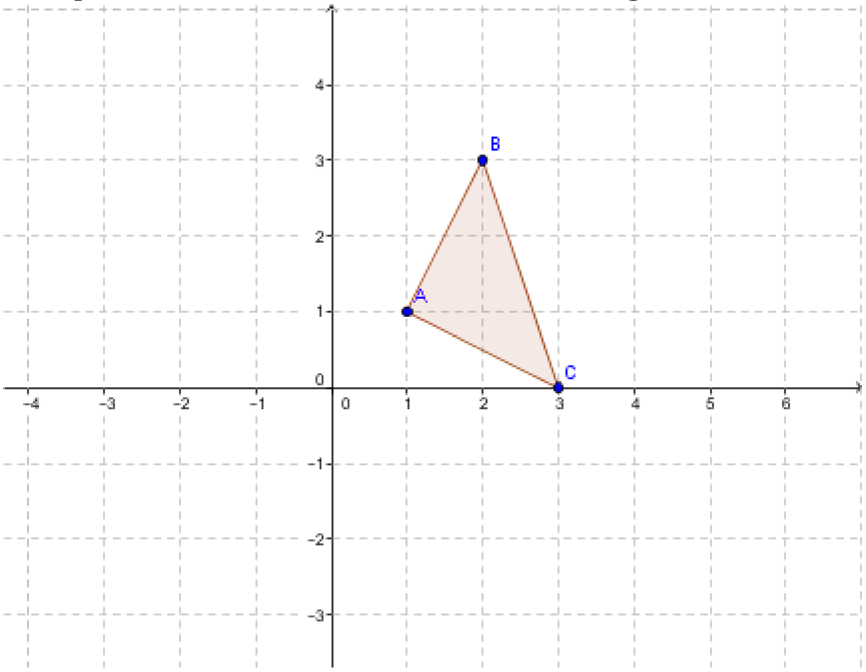
La valeur en y du point A est passée de 3 à 1, c'est-à-dire une différence de 2.
La valeur en y du point B est passée de 2 à 0, c'est-à-dire une différence de 2.
La valeur en y du point C est passée de 1 à -1, c'est-à-dire une différence de 2.

La règle de la translation est donc : $t_{(-4,-2)}:(x,y)\mapsto(x-4,y-2)$.

2- Les rotations dans un plan cartésien :

On appelle **rotation** la transformation géométrique qui fait tourner une figure autour d'un point fixe appelé centre de rotation, selon un angle. Ainsi, une rotation r est définie par son centre O et son angle θ. On note donc une rotation comme ceci: $r_{(O,\theta)}$.

Exemple : **Effectue une rotation centrée à l'origine de $90°$ dans le sens horaire.**



Étape 1 : Bien identifier les informations de la rotation.
Centre : $(0,0)$
Grandeur : $90°$
Sens : horaire

C'est une rotation de $-90°$ (sens horaire donc signe négatif). La règle associée à cette rotation est la suivante : $r_{(O,-90°)}:(x,y)\mapsto(y,-x)$.

Étape 2 : On identifie les sommets de la figure initiale.

$A(1,1)$
$B(2,3)$
$C(3,0)$

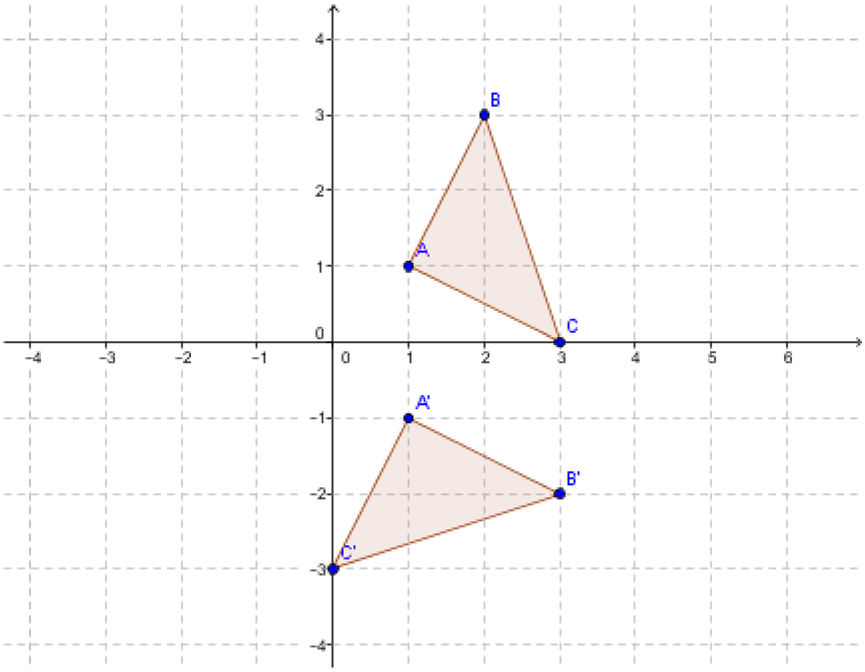
Étape 3 : À l'aide de la règle de rotation, on trouve les coordonnées des sommets de la figure image.

La règle énonce que les coordonnées qui était en y (figure initiale) prend la place du x (dans la figure finale). Ensuite, les coordonnées qui était en x (figure initiale) doit changer de signe et prendre la place du y (dans la figure finale).

$A(1,1)\mapsto(1,-1)=A'$
$B(2,3)\mapsto(3,-2)=B'$
$C(3,0)\mapsto(0,-3)=C'$

Étape 4 : Les nouvelles coordonnées sont celles de l'image de la figure initiale ayant subi une rotation de $-90°$.
On trace le triangle image.

L'image suivante illustre le déplacement de $90°$ dans le sens horaire de chaque point par rapport au centre :



3- Les réflexions dans un plan cartésien :

La **réflexion** (ou symétrie) est une transformation qui génère une image renversée par rapport à un axe de réflexion. L'axe de réflexion se trouve à mi-chemin entre la figure initiale et la figure image.

Dans un plan cartésien, certains axes définis comme axes de réflexion permettent de décrire la réflexion sous la forme de règles simples. Ces axes sont :

- l'axe des abscisses;
- l'axe des ordonnées;
- les bissectrices (lignes qui séparent un angle en deux parties égales) des quadrants.

Ainsi, on peut effectuer la réflexion d'une figure par rapport à l'axe des abscisses ou des ordonnées, ou par rapport aux bissectrices des quadrants.

Une règle est associée à chaque axe de réflexion.

L’axe des abscisses: $s_x:(x,y)\mapsto(x,-y)$;

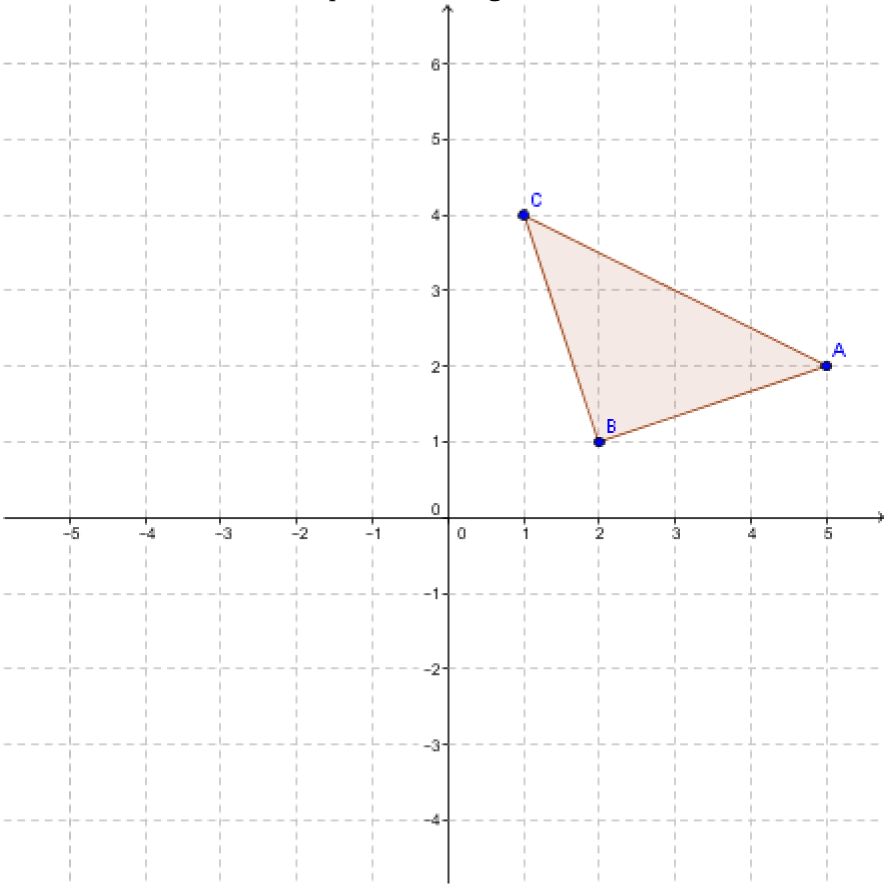
L’axe des ordonnées: $s_y:(x,y)\mapsto(-x,y)$;

La bissectrice des quadrants 1 et 3: $s_/:(x,y)\mapsto(y,x)$;

La bissectrice des quadrants 2 et 4: $s_\backslash:(x,y)\mapsto(-y,-x)$.

Exemple de réflexion par rapport à l'axe des y (ordonnées)

Effectue la réflexion indiquée du triangle ABC.



Étape 1 : On identifie les sommets du triangle ABC.

$A(5,2)$

$B(2,1)$

$C(1,4)$

Étape 2 : On effectue la réflexion à l’aide de la règle suivante:

$s_y:(x,y)\mapsto(-x,y)$.

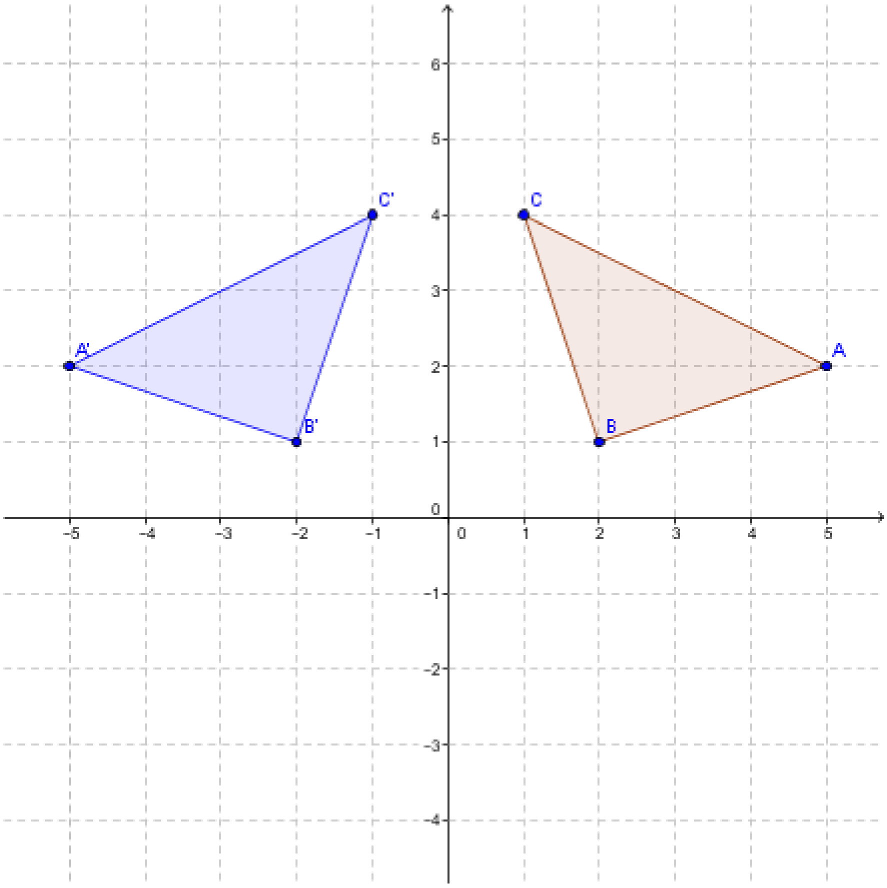
Les sommets du triangle deviennent donc:

$A=(5,2)\mapsto(-5,2)=A'$;

$B=(2,1)\mapsto(-2,1)=B'$;

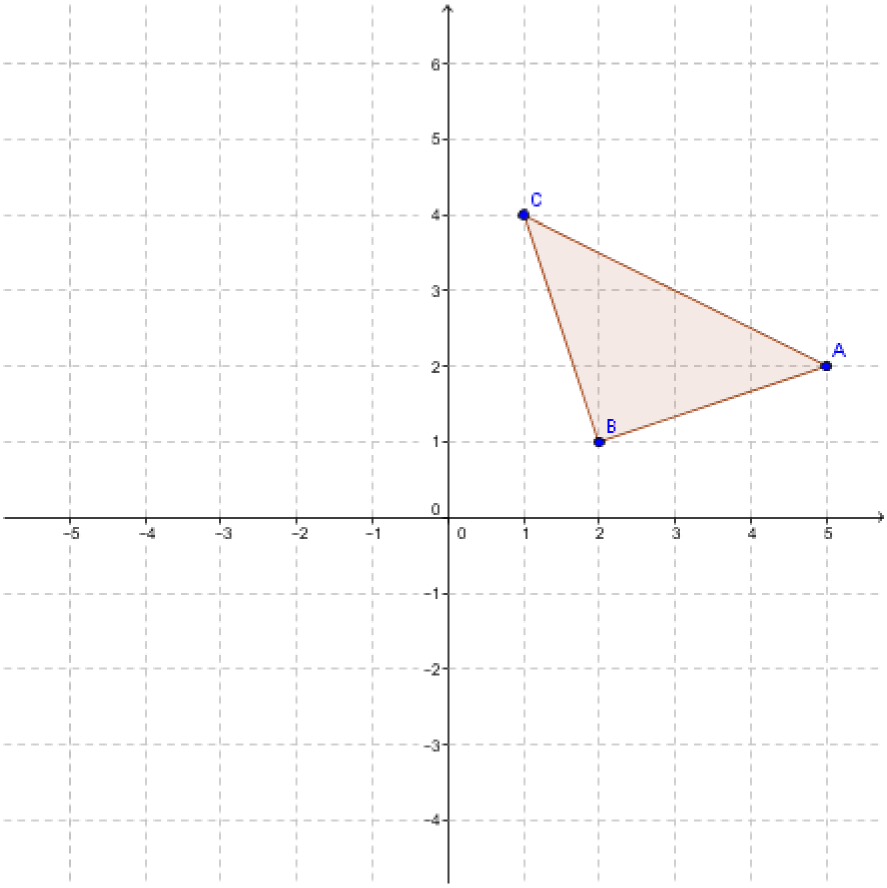
$C=(1,4)\mapsto(-1,4)=C'$.

Étape 3 : On trace le triangle final bleu.



Exemple de réflexion par rapport à la bissectrice des quadrants 2 et 4

Effectue la réflexion indiquée du triangle ABC.



Étape 1 : On identifie les sommets du triangle ABC.

$A(5,2)$

$B(2,1)$

$C(1,4)$

Étape 2 : On effectue la réflexion à l'aide de la règle suivante:

$s\:(x,y)\mapsto(-y,-x)$.

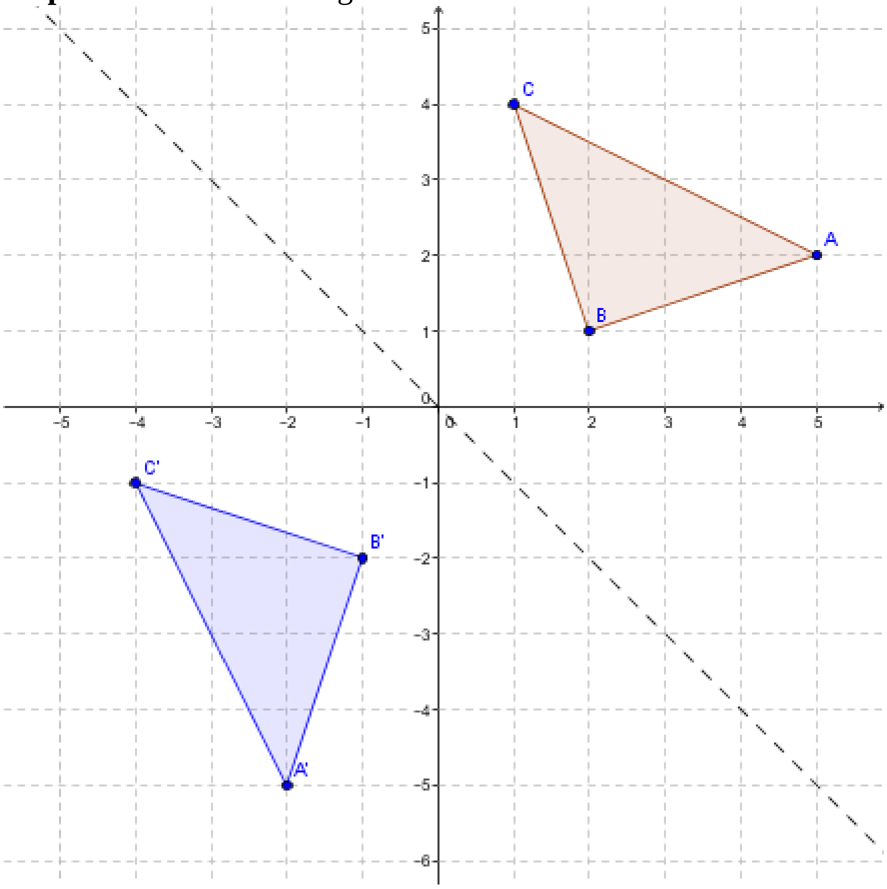
Les sommets du triangle deviennent donc:

$A=(5,2)\mapsto(-2,-5)=A'$;

$B=(2,1)\mapsto(-1,-2)=B'$;

$C=(1,4)\mapsto(-4,-1)=C'$.

Étape 3 : On trace le triangle final bleu.



4- Les homothéties dans un plan cartésien :

L'homothétie est une transformation qui permet d'agrandir ou de réduire une figure. On réalise l'homothétie à partir d'un centre d'homothétie (O) et d'un rapport d'homothétie (k). On note l'homothétie $h(O,k)$.

Lorsque le centre d'homothétie se trouve au point origine dans un plan cartésien, l'homothétie est représentée par une règle de transformation de la forme :

$$h_{(O,k)}:(x,y)\mapsto(kx,ky).$$

h indique que c'est une homothétie, O indique le centre est à l'origine et k est le rapport d'homothétie.

Cette règle signifie qu'une homothétie de centre O et de rapport k pratiquée sur un point de coordonnées (x,y) donnera le point image (kx,ky). Il s'agit donc de multiplier les coordonnées x et y par le rapport d'homothétie.

Le centre d'homothétie peut se trouver soit à l'intérieur ou à l'extérieur de la figure, mais c'est toujours la même règle qui s'applique. Les rapports d'homothétie peuvent être positifs ou négatifs, entiers ou fractionnaires.

Voici l'impact du rapport d'homothétie sur une figure selon sa valeur :

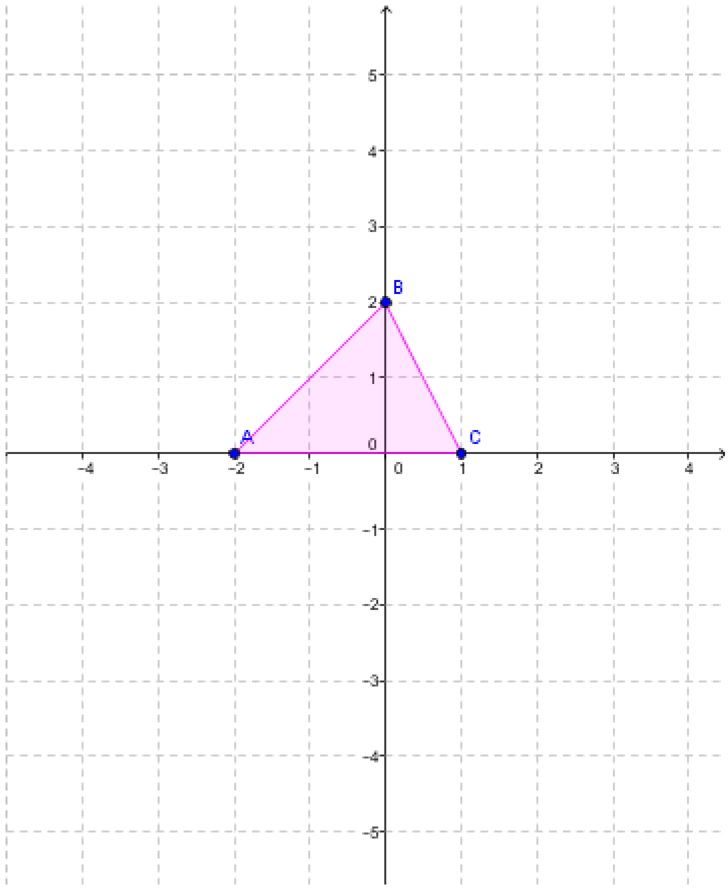
$\boldsymbol{k>1}$	Agrandissement (dilation) de la figure initiale
$\boldsymbol{0<k<1}$	Réduction (contraction) de la figure initiale
$\boldsymbol{k=1}$	Aucun changement
$\boldsymbol{k=-1}$	Changement d'orientation
$\boldsymbol{k<-1}$	Agrandissement (dilation) de la figure initiale et la figure image change d'orientation.
$\boldsymbol{-1<k<0}$	Réduction (contraction) de la figure initiale et la figure image change d'orientation.

Exemple pour $\boldsymbol{k>1}$

Effectue l'homothétie suivante dont le $k=2$ et dont le centre se trouve à l'origine.

Étape 1 : Identifier les sommets du triangle rose (figure initiale).

$A(-2,0)$
$B(0,2)$
$C(1,0)$

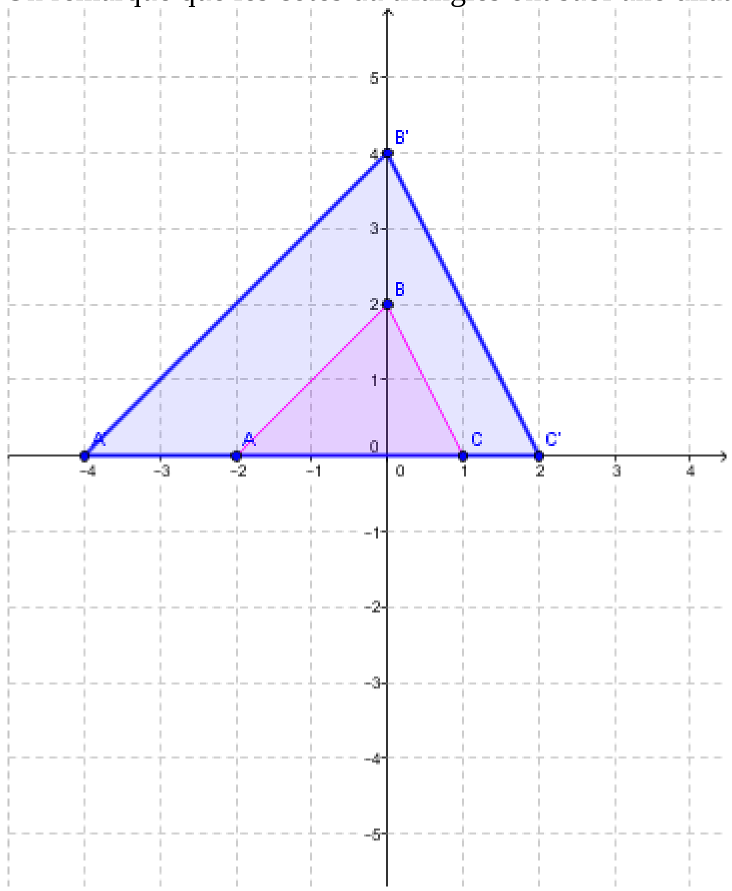


Étape 2 : Avec la règle, on trouve les coordonnées des points de la figure image à l'aide de la règle suviante:
$h_{(O,2)}:(x,y)\mapsto(2x,2y)$.

Les sommets deviennent donc:
$A(-2,0)\mapsto(-4,0)=A'$;
$B(0,2)\mapsto(0,4)=B'$;
$C(1,0)\mapsto(2,0)=C'$.

Étape 3 : On peut maintenant tracer le triangle bleu (figure image) résultant de l'homothétie.

On remarque que les côtés du triangles ont subi une dilatation.

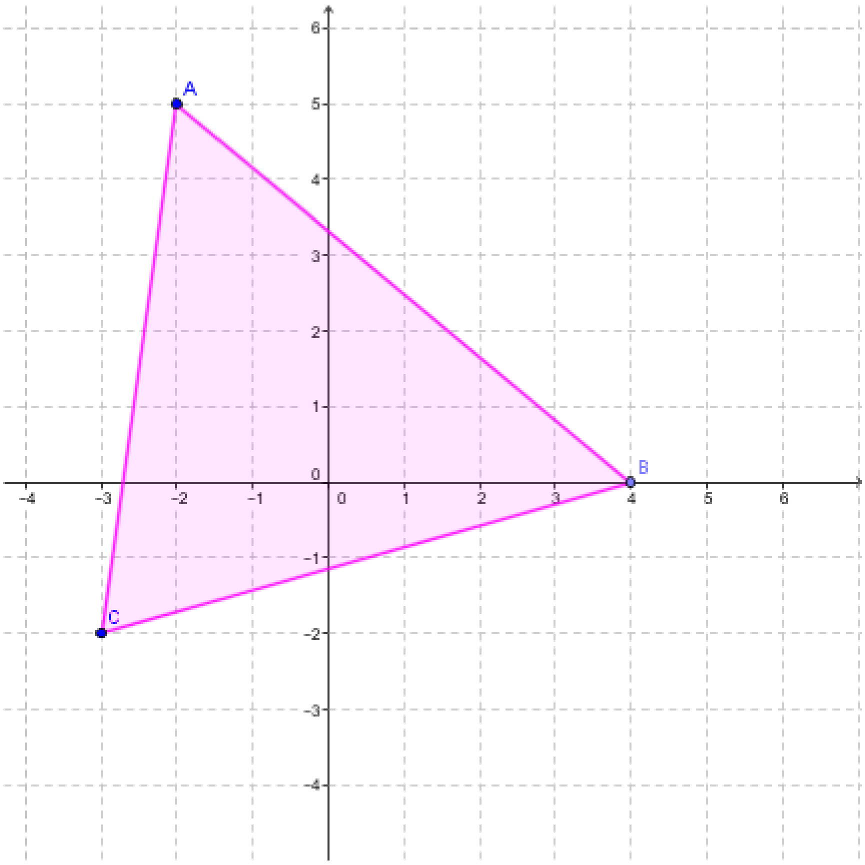


Exemple pour $0<k<1$

Effectue l'homothétie suivante dont le $k=1/2$ et dont le centre se trouve à l'origine.

Étape 1 : Identifier les sommets du triangle rose (figure initiale).

$A(-2,5)$
$B(4,0)$
$C(-3,-2)$



Étape 2 : Avec la règle, on trouve les coordonnées des points de la figure image à l'aide de la règle suivante:

$h_{(O,1/2)}:(x,y)\mapsto(1/2x,1/2y)$.

Les sommets deviennent donc:

$A(-2,5)\mapsto(-1,2,5)=A'$;

$B(4,0)\mapsto(2,0)=B'$;

$C(-3,-2)\mapsto(-1,5,-1)=C'$.

Étape 3 : On peut maintenant tracer le triangle bleu (figure image) résultant de l'homothétie.

On remarque que les côtés du triangle ont subi une contraction.