Les matrices de transformation

Dans le plan cartésien, une matrice de transformation est une matrice qui permet, à partir des coordonnées d'un point initial, de trouver celles de son image par une transformation géométrique donnée.

FORMULE

Soit un point initial (x, y) et soit la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice de transformation.

On obtient le point image (x', y') résultant de la transformation géométrique.

Ce point image se calcule ainsi:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Il est possible d'effectuer diverses transformations géométriques grâce aux matrices:

- Changement d'échelle horizontal
- Changement d'échelle vertical
- La translation dans le plan cartésien
- Réflexion par rapport à l'axe des abscisses
- Réflexion par rapport l'axe des ordonnées
- La rotation de 90 degrés centrée à l'origine
- La rotation de 180 degrés centrée à l'origine
- La rotation de 270 degrés centrée à l'origine
- L'homothétie de rapport k centrée à l'origine
- Les compositions de transformations géométriques

CHANGEMENT D'ÉCHELLE HORIZONTAL

FORMULE

Dans un plan cartésien, lorsque l'on veut effectuer un changement d'échelle horizontal de facteur k, on applique la transformation suivante:

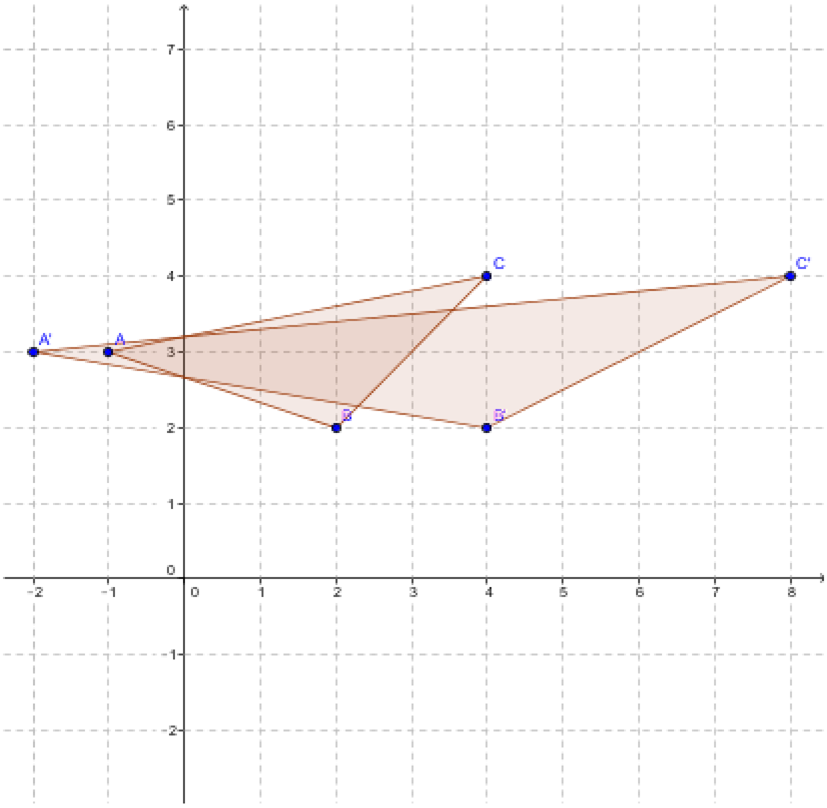
$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$ où (x, y) est le point initial et (x', y') est le point image.

Exemple : Soit le triangle ABC dont les sommets sont $A=(-1,3)$,$B=(2,2)$ et $C=(4,4)$.
On veut effectuer un changement d'échelle horizontal de facteur 2.

Pour trouver les sommets de la figure image, on effectue les calculs suivants:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = A'$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = B'$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = C'$$

On obtient le schéma suivant:



Changement d'échelle vertical

FORMULE

Dans un plan cartésien, lorsque l'on veut effectuer un changement d'échelle vertical de facteur k, on applique la transformation suivante:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ où (x, y) est le point initial et (x', y') est le point image.

Exemple : Soit le triangle ABC dont les sommets sont $A=(-1,3)$,$B=(2,2)$ et $C=(4,4)$.
On veut effectuer un changement d'échelle vertical de facteur 3.

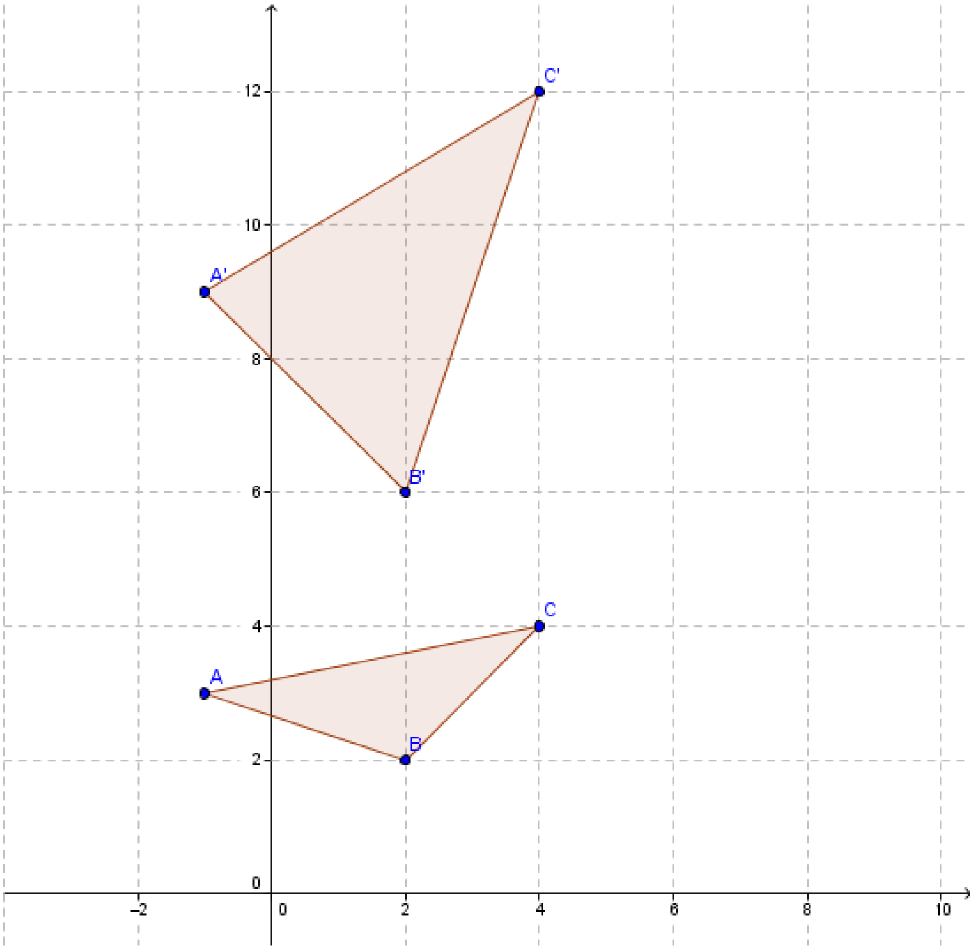
Pour trouver les sommets de la figure image, on effectue les calculs suivants:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix} = A'$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = B'$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix} = C'$$

On obtient le schéma suivant:



La translation dans le plan cartésien

FORMULE

Dans un plan cartésien, lorsque l'on veut effectuer une translation t selon un vecteur $\vec{t}\,(a, b)$, on applique la transformation suivante:

$$\begin{bmatrix} x+a \\ y+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$ où (x, y) est le point initial et (x', y') est le point image.

On peut aussi utiliser la matrice de transformation $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$. Toutefois pour utiliser cette matrice, il faut former une autre matrice où chaque ligne correspond aux coordonnées d'un point et dont la dernière colonne est composée de seulement des 1.

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1'} & y_{1'} \\ x_{2'} & y_{2'} \\ x_{3'} & y_{3'} \end{bmatrix}$$

Exemple : Soit le triangle ABC dont les sommets sont les points $A=(-2,1)$, $B=(1,2)$ et $C=(-1,4)$. On veut effectuer une translation définie par le vecteur $\vec{t}(-2,-2)$.

Ainsi, on obtient la transformation suivante:

$$\begin{bmatrix} x-2 \\ y-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$ où (x, y) est le point initial et où (x', y') est le point image.

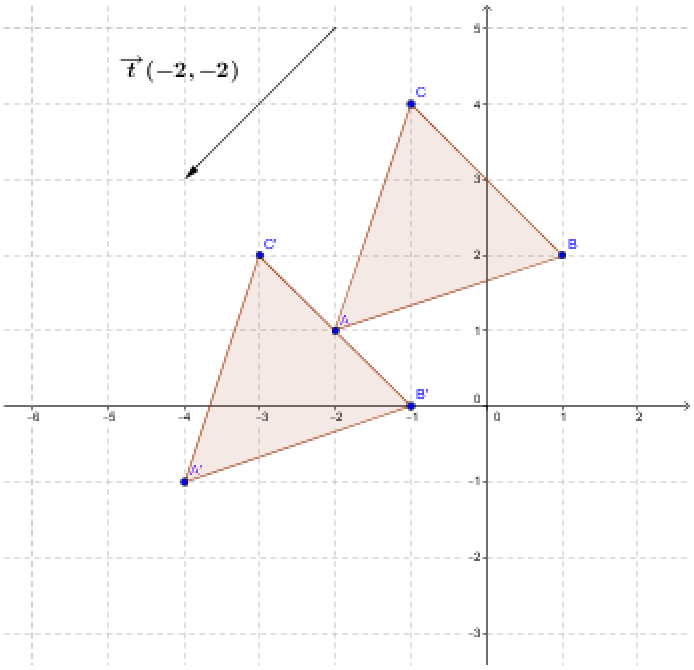
Pour trouver les sommets de la figure image, on effectue les calculs suivants:

$$\begin{bmatrix} -2-2 \\ 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} = A'$$
$$\begin{bmatrix} 1-2 \\ 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = B'$$
$$\begin{bmatrix} -1-2 \\ 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = C'$$

On obtient les mêmes coordonnées si on utilise la matrice de transformation de 3 lignes et 2 colonnes.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

On obtient le schéma suivant:



Réflexion par rapport à l'axe des abscisses

FORMULE

Dans un plan cartésien, lorsque l'on veut effectuer une réflexion s par rapport à l'axe des abscisses notée s_x, on applique la transformation suivante:
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ où (x, y) est le point initial et (x', y') est le point image.

Exemple : Soit le triangle ABC dont les sommets sont les points $A=(1,1)$,$B=(-2,3)$ et $C=(2,4)$. On veut effectuer une réflexion par rapport à l'axe des abscisses.

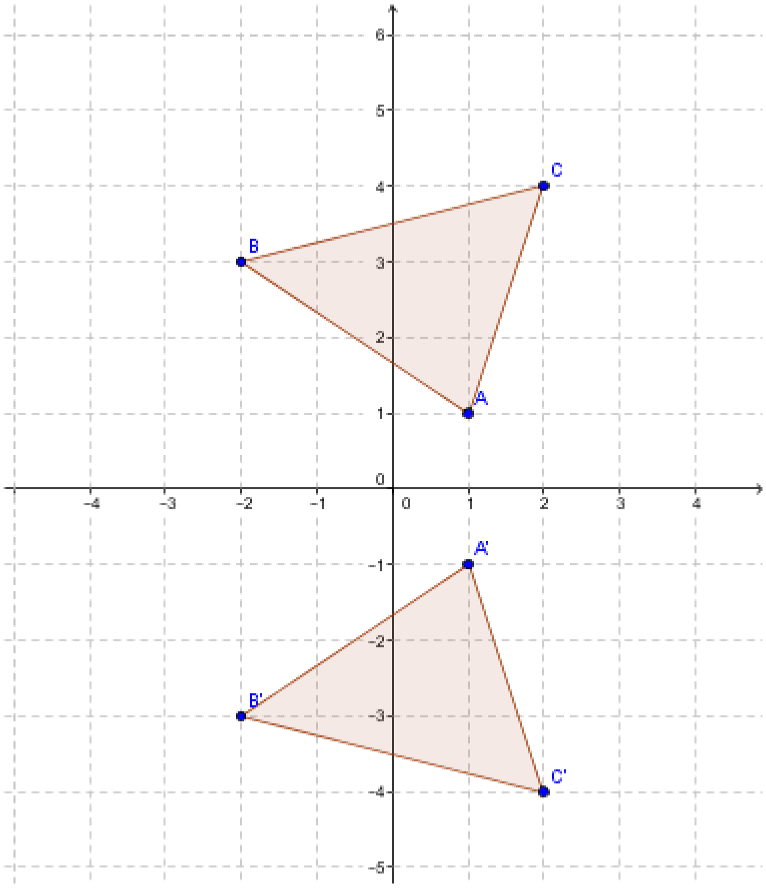
Pour trouver les sommets de la figure image, on effectue les calculs suivants:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = A'$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} = B'$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = C'$$

On obtient le schéma suivant:



Réflexion par rapport à l'axe des ordonnées

FORMULE

Dans un plan cartésien, lorsque l'on veut effectuer une réflexion s par rapport à l'axe des ordonnées notée s_y, on applique la transformation suivante:

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ où (x, y) est le point initial et (x', y') est le point image.

Exemple : Soit le quadrilatère $ABCD$ dont les sommets sont A=(2,3), B=(3,1), C=(5,2) et D=(5,5). On veut effectuer une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées.

Pour trouver les sommets de la figure image, on effectue les calculs suivants:

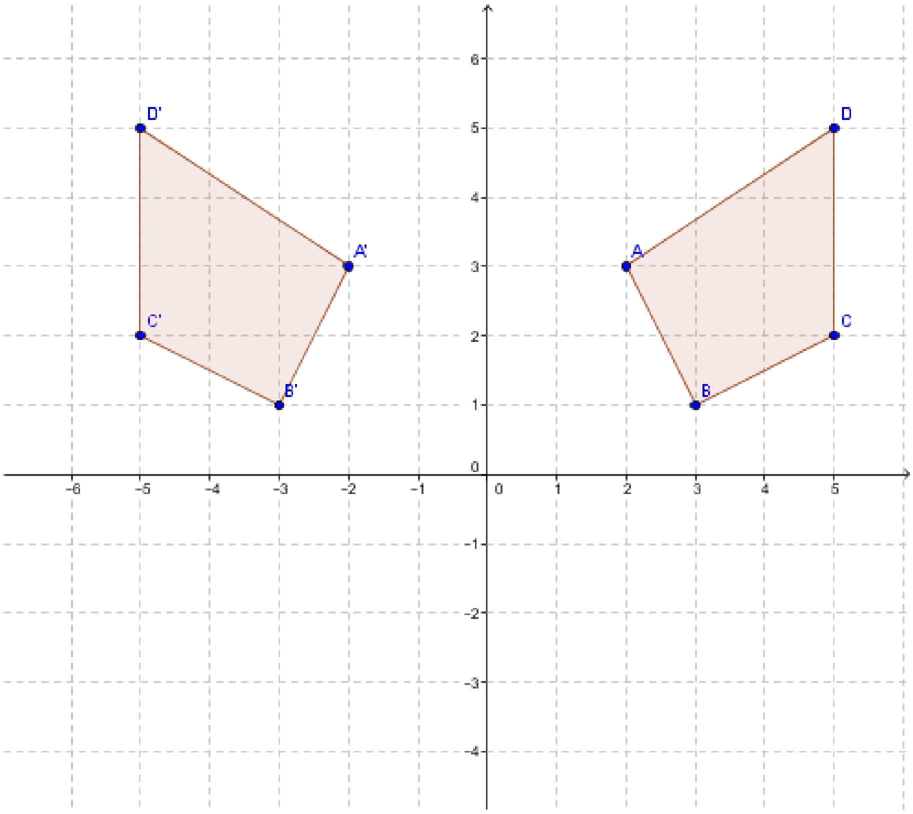
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = A'$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = B'$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} = C'$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix} = D'$$

On obtient le schéma suivant:



La rotation de 90 degrés centrée à l'origine

FORMULE

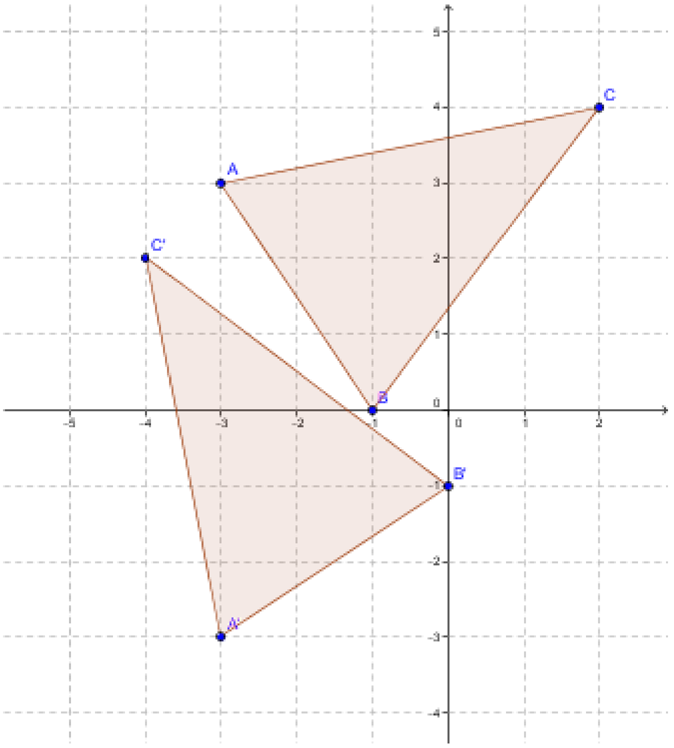
Dans un plan cartésien, lorsque l'on veut effectuer une rotation r d'un angle de 90 degrés (sens anti-horaire) centrée à l'origine, on applique la transformation suivante:
$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ où (x, y) est le point initial et (x', y') est le point image.

Exemple : Soit le triangle ABC dont les sommets sont $A=(-3,3), B=(-1,0)$ et $C=(2,4)$. On veut effectuer une rotation centrée à l'origine dont l'angle est de 90 degrés dans le sens anti-horaire.

Pour trouver les sommets de la figure image, on effectue les calculs suivants:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} = A'$$
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = B'$$
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = C'$$

On obtient le schéma suivant:



La rotation de 180 degrés centrée à l'origine

FORMULE

Dans un plan cartésien, lorsque l'on veut effectuer une rotation r d'un angle de 180 degrés (sens anti-horaire) centrée à l'origine, on applique la transformation suivante:
$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ où (x, y) est le point initial et (x', y') est le point image.

Exemple : Soit le triangle ABC dont les sommets sont $A=(-4,1)$,$B=(1,-2)$ et $C=(3,3)$. On veut effectuer une rotation centrée à l'origine dont l'angle est de 180 degrés dans le sens anti-horaire.

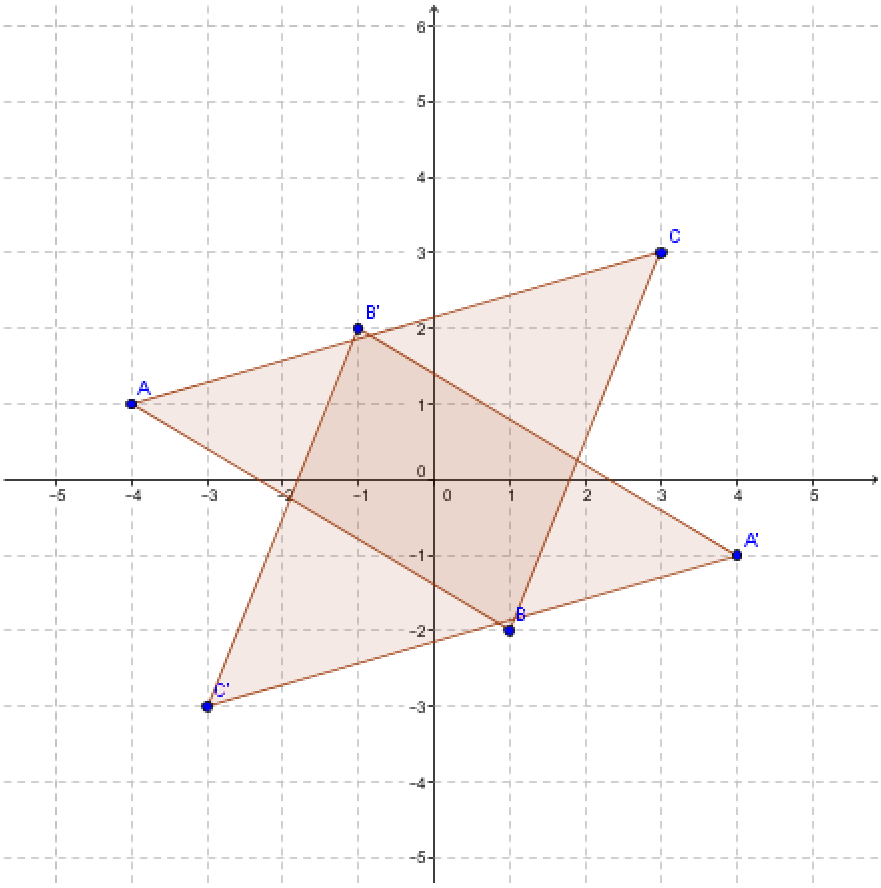
Pour trouver les sommets de la figure image, on effectue les calculs suivants:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = A'$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = B'$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} = C'$$

On obtient le schéma suivant:



La rotation de 270 degrés centrée à l'origine

FORMULE

Dans un plan cartésien, lorsque l'on veut effectuer une rotation r d'un angle de 270 degrés (sens anti-horaire) centrée à l'origine, on applique la transformation suivante:

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ où (x, y) est le point initial et (x', y') est le point image.

Exemple : Soit le triangle ABC dont les sommets sont $A=(-4,1)$,$B=(1,-2)$ et $C=(3,3)$. On veut effectuer une rotation centrée à l'origine dont l'angle est de 270 degrés dans le sens anti-horaire.

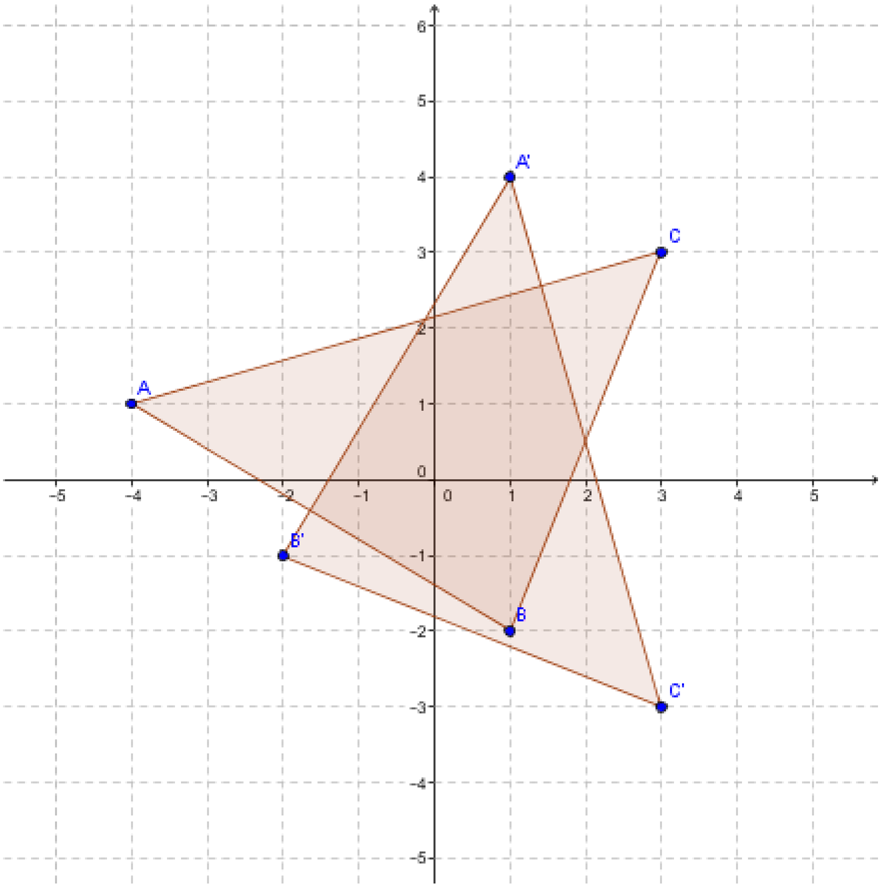
Pour trouver les sommets de la figure image, on effectue les calculs suivants:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = A'$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = B'$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = C'$$

On obtient le schéma suivant:



L'homothétie de rapport k centrée à l'origine

FORMULE

Dans un plan cartésien, lorsque l'on veut effectuer une homothétie h centrée à l'origine de rapport k, on applique la transformation suivante:

$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ où (x, y) est le point initial et (x', y') est le point image.

Exemple : Soit le quadrilatère $ABCD$ dont les sommets sont $A=(-2,-2)$, $B=(-1,2)$, $C=(2,-1)$ et $D=(3,2)$. On veut effectuer une homothétie centrée à l'origine de rapport $k=2$.

Pour trouver les sommets de la figure image, on effectue les calculs suivants:

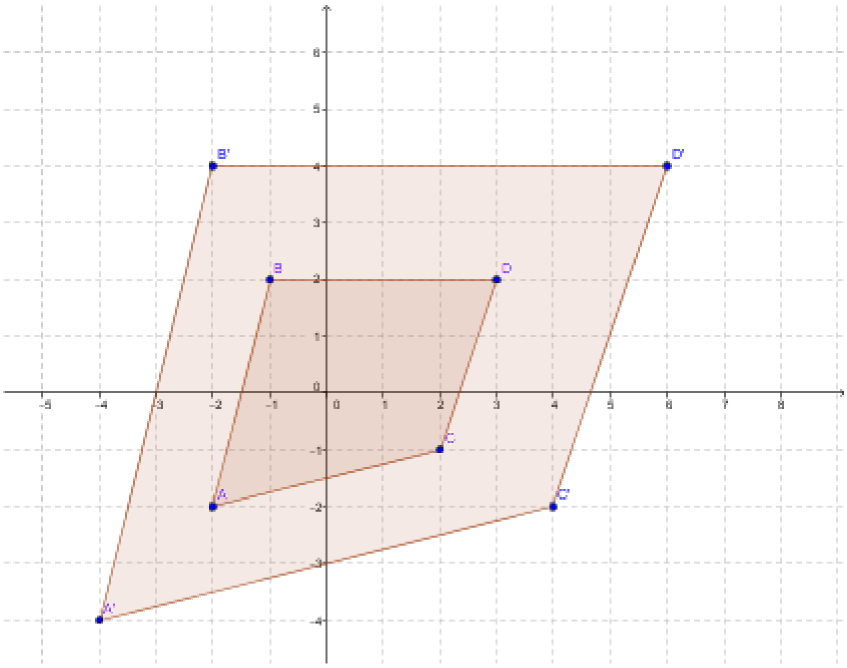
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix} = A'$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = B'$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = C'$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = D'$$

On obtient le schéma suivant:



Les compositions de transformations géométriques

Une **composition de transformations** est tout simplement un enchaînement de transformations. Pour effectuer une composition de transformations géométriques, on applique chaque transformation géométrique l'une après l'autre en commençant de droite vers la gauche. Par exemple pour $s_x \circ s_y$, il faut effectuer s_y puis ensuite s_x.

Exemple : Soit le triangle ABC dont les sommets sont $A=(1,1)$,$B=(2,4)$ et $C=(3,3)$. On veut effectuer une réflexion par rapport à l'axe des abscisses suivie d'une rotation d'un angle de 270 degrés (sens anti-horaire) centrée à l'origine.

On note ceci $r_{270} \circ s_x$.

On effectue la réflexion par rapport à l'axe des abscisses:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

On obtient alors:

$A' = (1, -1)$, $B' = (2, -4)$ et $C' = (3, -3)$.

Ensuite, on effectue la rotation d'un angle de 90 degrés (sens anti-horaire) centrée à l'origine:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$$

On obtient alors:

$A'' = (-1, -1)$, $B'' = (-4, -2)$ et $C'' = (-3, -3)$.

On obtient le schéma suivant: