Analyse matricielle

1.0.1 Définitions de base

Définition 1.0.1 *On appelle* ***matrice*** *de type* (n, m)*, un tableau à* n *lignes et* p *colonnes formées d'éléments d'un ensemble* $\mathbb{k}$ *(*$\mathbb{k} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*).*

Le terme situé à la $i^{\text{ème}}$ *ligne et la* $j^{\text{ème}}$ *colonne d'une matrice* A *est noté* a_{ij}*.*

Nous adopterons, pour la représentation matricielle d'une matrice A*, les formes suivantes:*

$$
\begin{aligned}
A &= (a_{ij}), \quad \text{avec } 1 \leq i \leq n \quad \text{et } 1 \leq j \leq m \\
A &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Définition 1.0.2 *On appelle* ***matrice carrée****, une matrice du type* (n, n)*. L'ensemble des matrices carrées de dimension* n *dans* $\mathbb{k}$ *est notée* $M_{n,n}(\mathbb{k})$ *ou* $M_n(\mathbb{k})$*.*

Les termes de la forme a_{ii} *d'une telle matrice constituent* ***la diagonale principale****.*

Exemple 1.0.1 $A = (3)$; $\qquad A \in M_1(\mathbb{R})$

$$B = \begin{pmatrix} 2+i & i-1 \\ 2i+1 & -4 \end{pmatrix}; \qquad B \in M_2(\mathbb{C})$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 9 \end{pmatrix}; \qquad C \in M_3(\mathbb{R})$$

Propriété: L'ensemble des matrices carrées $M_n(\mathbb{k})$ possède pour l'addition et la multiplication une structure d'anneau.

Définition 1.0.3 *On appelle matrice* ***diagonale****, une matrice carrée dont tous les éléments sont nuls sauf ceux de la diagonale principale.*

$$A = (a_{ij}), \quad \textit{avec} \;\; a_{ij} = 0 \quad \textit{pour tout} \;\; i \neq j.$$

Propriété:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \Longrightarrow A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{pmatrix}.$$

Définition 1.0.4 *Matrice* ***unité*** *I, est une matrice diagonale où tous les termes de la diagonale principale sont égaux à* 1.

$$A = (a_{ij}), \quad \textit{avec} \;\; a_{ii} = 1.$$

Propriété:

$$AI = IA = A, \text{ avec } A \text{ et } I \in M_n(\mathbb{k}).$$

Définition 1.0.5 *On appelle matrice* ***scalaire****, une matrice diagonale où tous les termes de la diagonale principale sont égaux.*

$$A = (a_{ij}), \quad \textit{avec} \;\; a_{ii} = \lambda \in \mathbb{k}.$$

Propriété:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \lambda I = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.0.6 *On appelle matrice **symétrique**, une matrice carrée dont les éléments symétriques par rapport à la diagonale sont égaux.*

$$A = (a_{ij}), \quad \textit{avec} \;\; a_{ij} = a_{ji}.$$

Propriété: Une matrice carrée A telle que $A = A^t$ est symétrique (A^t : la transposé de la matrice A).

Exemple 1.0.2 *La matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 4 & -10 \\ 4 & \beta & 2 \\ -10 & 2 & \gamma \end{pmatrix}; \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

est symétrique.

Définition 1.0.7 *On appelle matrice **antisymétrique**, une matrice carrée dont les éléments symétriques par rapport à la diagonale sont opposés et ceux de la diagonale principale nuls.*

$$A = (a_{ij}), \quad \textit{avec} \;\; a_{ij} = -a_{ji} \quad \textit{et } a_{ii} = 0.$$

Propriété: Une matrice carrée A telle que $A = -A^t$ est antisymétrique (A^t : la transposé de la matrice A).

Exemple 1.0.3 *La matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 10 \\ 4 & 0 & -2 \\ -10 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad a_{ij} = -a_{ji} \quad \textit{et } a_{ii} = 0.$$

est antisymétrique.

Définition 1.0.8 *On appelle matrice **triangulaire**, une matrice carrée dont les éléments sont nuls au-dessus ($a_{ij} = 0$ pour $i > j$: matrice **triangulaire supérieure**) ou au-dessous ($a_{ij} = 0$ pour $i < j$: matrice **triangulaire inférieure**) de la diagonale principale.*

Exemple 1.0.4 *Les matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}; \quad et\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -10 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

sont des matrices triangulaires. A est une matrice triangulaire supérieure et B est une matrice triangulaire inférieure.

Définition 1.0.9 *On appelle **matrice non carrée** (ou **matrice rectangulaire**), une matrice du type (n, m). L'ensemble des matrices non carrées, dans $\mathbb{k}$ est notée $M_{n,m}(\mathbb{k})$.*

Exemple 1.0.5 $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$; $\qquad A \in M_{1,4}(\mathbb{R})$

$B = \begin{pmatrix} 2+i & 5 & i-1 \\ 2i+1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$; $\qquad B \in M_{2,3}(\mathbb{C})$

$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$; $\qquad C \in M_{3,2}(\mathbb{R})$

Les vecteurs lignes sont des matrices uni-ligne du type $(1, m)$.

Les vecteurs colonnes sont des matrices uni-colonne du type $(n, 1)$.

1.0.2 Opérations sur les matrices

Egalité de deux matrices

Définition 1.0.10 *Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ de même type (n, m) sont égales si:*

$$\text{pour tout } 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq m : a_{ij} = b_{ij}.$$

Exemple 1.0.6 *Soient les matrices,*

$$A = \begin{pmatrix} x+y & z+2t \\ x-y & 2z-t \end{pmatrix}; \quad et\ B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix};$$

Déterminer x, y, z et t sachant que $A = B$.

Somme et différence de deux matrices

Définition 1.0.11 *Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ de même type (n, m) peuvent s'additionner ou se soustraire. La somme (ou différence) de ces deux matrices est une matrice $C = (c_{ij})$ du même type telle que:*

$$C = A \pm B \Longleftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}.$$

Propriété: L'addition ainsi définie est une loi de composition interne. Cette loi munit l'ensemble des matrices du type (n, m) d'une structure de groupe abélien.

1. **associativité:** $A + (B + C) = (A + B) + C$.
2. **commutativité:** $A + B = B + A$.
3. **élément neutre:** $A + 0 = 0 + A = A$. (0 matrice nulle: $a_{ij} = 0$, $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le m$)
4. **élément symétrique:** $A + (-A) = 0$. ($-A = (-a_{ij})$ matrice opposée à $A = (a_{ij})$)

La soustraction ne remplit pas les critères d'associativité et de commutativité.

Multiplication d'une matrice par un scalaire

Définition 1.0.12 *Le produit d'une matrice A par un scalaire $\lambda \in \Bbbk$, noté λA, est la matrice obtenue en multipliant chaque élément a_{ij} de A par λ:*

$$C = \lambda A \Longleftrightarrow c_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Propriété: La multiplication d'une matrice par un scalaire est une loi de composition externe vérifiant les propriétés: $\forall (\alpha, \beta) \in \Bbbk^2$ et $\forall (A, B) \in M_{n,m}^2 (\Bbbk)$:

1. $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$.
2. $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$.
3. $\alpha (\beta A) = (\alpha \beta) A$.
4. $IA = A$.

L'ensemble des matrices (n, m) muni des deux lois (addition et multiplication par un scalaire) possède une structure d'espace vectoriel sur $\Bbbk$ ($\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\Bbbk = \mathbb{C}$).

Multiplication de deux matrices

Définition 1.0.13 *Deux matrices $A = (a_{ik})$ de type (n, p) et $B = (b_{kj})$ de type (p, m) peuvent se multiplier. Le produit de ces deux matrices est une matrice $C = (c_{ij})$ de type (n, m), où l'élément c_{ij} de C est obtenu en sommant les produits des éléments de la ième ligne de A par les éléments de la jème colonne de B.*

$$C = AB \Longleftrightarrow c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ip} b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Remarque 1.0.1 *Pour effectuer le produit de A par B, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.*

Propriétés:

1. Le produit matriciel n'est pas, en général, commutatif: $AB \neq BA$.
2. Le produit matriciel est associatif: $A (BC) = (AB) C$
3. Le produit matriciel est distributif par rapport à l'addition:

$$\begin{aligned} A (B + C) &= AC + BC, \quad (\ A \text{ prémultiplie } (B + C)\ ) \\ (B + C) A &= BA + CA, \quad (\ A \text{ postmultiplie } (B + C)\ ) \end{aligned}$$

4. Le produit matriciel est nul si l'une des matrices est nulle

$$(A = 0 \text{ ou } B = 0) \Longrightarrow AB = 0,$$

mais $AB = 0$ n'implique pas ($A = 0$ ou $B = 0$).

5. L'égalité $AB = AC$ n'implique pas $B = C$.

Exemple 1.0.7 *On donne les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad et\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix};$$

BA n'existe pas car le nombre de colonnes de A est différent du nombre de lignes de B.

Transposition d'une matrice

Définition 1.0.14 *On appelle* ***transposée d'une matrice*** *A de type (n, m) et de terme général a_{ij}, la matrice notée A^t obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de même indice i de A:*

$$A = (a_{ij}) \Longleftrightarrow A^t = (a_{ji})$$

Propriétés:

1. $(A^t)^t = A$.
2. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.
3. $(A + B)^t = A^t + B^t$.
4. $(AB)^t = B^t A^t$.

1.0.3 Déterminant d'une matrice

Définition 1.0.15 *Soit la matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{k})$. On appelle* ***déterminant*** *de la matrice A, d'ordre n, le tableau carré contenant les éléments de la matrice limité par deux traits verticaux.*

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Exemple 1.0.8 *1.* $n = 2$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

2. $n = 3$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Définition 1.0.16 *On appelle* ***mineur*** *$|M_{ij}|$ de l'élément a_{ij} du déterminant d'ordre n, le déterminant d'ordre $(n-1)$ obtenu en supprimant la ième ligne et la jème colonne de $|A|$.*

Exemple 1.0.9 *1.* $n = 2, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad |M_{11}| = a_{22}, \quad |M_{12}| = a_{21}, ...$

2. $n = 3, \quad |A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \quad |M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}, ..$$

Définition 1.0.17 *On appelle* ***cofacteur*** Δ_{ij} *de l'élément* a_{ij}*, le mineur* $|M_{ij}|$ *affecté du signe* $+$ *ou* $-$ *suivant la relation:*

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

Exemple 1.0.10 *1.* $n = 2$, $|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $|\Delta_{11}| = (-1)^{1+1} |M_{11}| = a_{22}$,

$|\Delta_{12}| = (-1)^{1+2} |M_{12}| = -a_{21}, ...$

2. $n = 3$, $|A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$|\Delta_{11}| = (-1)^{1+1} |M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},$$

$$|\Delta_{12}| = (-1)^{1+2} |M_{12}| = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right).$$

Méthodes de calcul des déterminants

La valeur d'un déterminant $|A|$ d'ordre n est donnée par un développement suivant:

$$\begin{array}{rcl} \text{une ligne } i & : & |A| = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} \\ & & \text{ou} \\ \text{une colonne } j & : & |A| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj} \end{array}$$

Exemple 1.0.11 *pour* $n = 2$*, Soit la matrice d'ordre* 2 *,* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Si on effectue un développement suivant la 1ère ligne, nous avons:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1} |M_{11}| + a_{12}(-1)^{1+2} |M_{12}| \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

Exemple 1.0.12 *Soit la matrice d'ordre* 2 , $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -2\Delta_{11} + 3\Delta_{12} \\ &= -2\,(-1)^{1+1}\,|M_{11}| + 3\,(-1)^{1+2}\,|M_{12}| \\ &= -8 - 3\,(-1) = -5 \end{aligned}$$

Exemple 1.0.13 *pour* $n = 3$, *Soit la matrice d'ordre* 3 , $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Un développement suivant la 2ème colonne, par exemple, conduit à

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32} \\ &= a_{12}\,(-1)^{1+2}\,|M_{12}| + a_{22}\,(-1)^{2+2}\,|M_{22}| + a_{32}\,(-1)^{3+2}\,|M_{32}| \\ &= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= -a_{12}\,(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{22}\,(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{32}\,(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \end{aligned}$$

Exemple 1.0.14 *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

Un développement suivant la 2ème colonne, par exemple, conduit à

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -6 & -3 \end{vmatrix} = -2\Delta_{12} + 5\Delta_{22} - 6\Delta_{32} \\ &= -2\,(-1)^{1+2}\,|M_{12}| + 5\,(-1)^{2+2}\,|M_{22}| - 6\,(-1)^{3+2}\,|M_{32}| \\ &= 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2\,(-9 + 2) + 5\,(-3 - 8) + 6\,(-1 - 12) = -147 \end{aligned}$$

Remarque 1.0.2 *Pour $n \geq 4$: Un calcul semblable au précédent amènera des mineurs d'ordre 3. Le calcul d'un déterminant est d'autant plus long que l'ordre de la matrice A est élevé.*

Les propriétés des déterminants vont nous permettre de faire apparaître le plus de zéros sur une ligne ou une colonne et ainsi réduire les calculs.

Propriétés d'un déterminant

Proposition 1.0.1 *Cas particulier :* ***Matrices diagonale et triangulaire***

Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire (supérieure ou inférieure) est égal au produit des termes de la diagonale principale.

Proposition 1.0.2 *Si tous les éléments d'une ligne (ou colonne) d'un déterminant $|A|$ sont nuls alors $|A| = 0$.*

Proposition 1.0.3 *Si deux lignes (ou deux colonnes) d'un déterminant $|A|$ sont proportionnelles (ou identiques) alors $|A| = 0$.*

Proposition 1.0.4 *Si l'on permute les lignes et les colonnes d'un déterminant, la valeur reste inchangée $|A^t| = |A|$.*

Proposition 1.0.5 *Si l'on permute deux lignes (ou deux colonnes) d'un déterminant, le signe du déterminant est changé.*

Proposition 1.0.6 *Si chaque élément d'une ligne (ou colonne) est multiplié par un scalaire λ, le déterminant est multiplié par λ.*

Proposition 1.0.7 *Si chaque élément d'une ligne (ou colonne) d'un déterminant peut se représenter par la somme de deux ou plusieurs nombres, le déterminant peut s'exprimer en fonction de la somme de deux ou plusieurs déterminants.*

Proposition 1.0.8 *Si aux éléments d'une ligne (ou colonne) on ajoute k fois les éléments correspondants d'une autre ligne (ou colonne), la valeur du déterminant reste inchangée.*

Proposition 1.0.9 *Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors:* $|AB| = |A|\,|B| = |B|\,|A|$.

Cas particuliers : $B = A^{-1}$

$$|AB| = \left|AA^{-1}\right| = |I| \Longleftrightarrow |A|\left|A^{-1}\right| = 1 \Longleftrightarrow \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$