Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires

Beaucoup de problèmes se réduisent à la résolution numérique d'un système d'équations linéaires. Il existe deux grandes classes de méthodes pour résoudre ce type de systèmes:

1. Les méthodes *directes* qui déterminent explicitement la solution après un nombre fini d'opérations arithmétiques,

2. Les méthodes *itératives* qui consistent à générer une suite qui converge vers la solution du système.

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux méthodes directes. Les méthodes itératives seront abordées au chapitre 4.

1.1 Introduction

On considère un système (S) de n équations à n inconnues de la forme:

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,n}x_n = b_n. \end{cases}$$

Les données sont les coefficients $a_{i,j}$ du système qui appartiennent à un corps $\Bbbk$ avec $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ainsi que les coefficients du second membre $b_1; ...; b_n$. Les inconnues sont $x_1; ...; x_n$ qui appartiennent à $\Bbbk$. Nous écrirons ce système sous forme matricielle

$$(S) \qquad Ax = b,$$

avec $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\Bbbk)$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \Bbbk^n$, et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \Bbbk^n$.

La matrice A est dite régulière (inversible) si $\det(A) \neq 0$; on a existence et unicité de la solution x si et seulement si la matrice A est inversible. Dans tout ce chapitre, on supposera que la matrice A est inversible.

Théoriquement, si A est inversible, la solution du système $Ax = b$ est donnée par la formule de Cramer:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad \text{pour } i = 1, 2, ..., n,$$

où A_i est une matrice obtenue en remplaçant la $i^{ième}$ colonne de A par le vecteur b.

Le nombre d'opérations nécessaires pour résoudre un système à l'aide des formules de Cramer est de $n(n+1)!$ opérations à virgule flottante. Par exemple, avec ordinateur fonctionnant à *100 megaflops* (*flops* = opérations à virgule flottante par secondes), il faudrait environ 3.10^{146} années pour résoudre un système d'ordre 100 !

Il faut donc développer des algorithmes alternatifs avec un coût (nombre d'opérations) raisonnable. Ce problème est un des plus importants de l'analyse numérique.

1.2 Remarques sur la résolution des systèmes triangulaires

L'idée des méthodes directes est de se ramener à la résolution d'un (ou de deux) système(s) triangulaire(s).

Supposons que A soit une matrice triangulaire inférieure. Le système s'écrit alors

$$(S):\begin{cases} a_{1,1}x_1 & = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 & = b_2, \\ \vdots \qquad \ddots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,n}x_n & = b_n. \end{cases}$$

Puisque A est supposée inversible, aucun des $a_{i,i}$ n'est nul et on peut résoudre ce système en utilisant l'algorithme de *substitution progressive* (ou substitution avant) suivant :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_{1,1}}, \\ x_i = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j\right), \text{ pour } i = 2, 3, ..., n \end{cases}$$

De façon analogue, lorsque A est triangulaire supérieure, on obtient l'algorithme de *substitution rétrograde* (ou substitution arrière):

$$\begin{cases} x_n = \frac{bn}{a_{n,n}}, \\ x_i = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j\right), \text{ pour } i = n-1, ..., 1 \end{cases}.$$

Proposition 1.2.1 *La résolution d'un système d'équations linéaires triangulaire d'ordre n se fait en n^2 opérations à virgule flottante. $\frac{n(n-1)}{2}$ additions (ou soustractions), $\frac{n(n-1)}{2}$ multiplications et n divisions.*

Exemple 1.2.1 *On considère le système suivant:*

$$(S):\begin{cases} 2x_1 & = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 & = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 & = 10. \end{cases}$$

la solution du système (S) est: $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = -1$.

1.3 Méthodes d'élimination de Gauss

Comme les systèmes triangulaires sont faciles et économiques à résoudre, le principe de méthode d'élimination de Gauss est de réduire le système $Ax = b$ au système $(MA)x =$

Mb avec MA soit une matrice triangulaire supérieure sans calculer explicitement M. On se ramène donc à la résolution d'un système triangulaire supérieur équivalent.

1.3.1 Description de la méthode

Soit à résoudre le système d'ordre 3 suivant:

$$\left\{\begin{array}{cccll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}\right.$$

nous allons construire un système équivalent en ne changeant pas la première équation. A la deuxième (resp la troisième) equation, on ajoute le produit par: $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ (resp $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$) de la première équation, si $a_{11} \neq 0$.

a_{11} est dit le premier **pivot**.

Symboliquement, on a la transformation ligne par ligne suivante:

$$\begin{array}{rl} ligne\ 1 \rightarrow & ligne\ 1 \\ ligne\ 2 \rightarrow & ligne\ 2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} ligne\ 1 \\ ligne\ 3 \rightarrow & ligne\ 3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} ligne\ 1 \end{array}$$

On obtient alors:

$$\left\{\begin{array}{cccll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & = & b_1 \\ 0 & +a'_{22}x_2 & +a'_{23}x_3 & = & b'_2 \\ 0 & +a'_{32}x_2 & +a'_{33}x_3 & = & b'_3 \end{array}\right.$$

Si $a_{11} = 0$, on peut effectuer une permutation des lignes de façon à amener à la place de a_{11} un terme non nul. Si la matrice est inversible, c'est toujour possible.

Ainsi, nous avons éliminé x_1 des deux dernières équations. Si $a'_{22} \neq 0$, (sinon on fait une permutation), on ne change pas les deux premières équations. A la troisième, on ajoute le produit par: $-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$ de la deuxième équation, ce qui revient à la transformation par lignes suivante:

$$\begin{aligned} ligne\ 1 &\to\ ligne\ 1 \\ ligne\ 2 &\to\ ligne\ 2 \\ ligne\ 3 &\to\ ligne\ 3 - \tfrac{a'_{32}}{a'_{22}} ligne\ 2 \end{aligned}$$

On obtient finalement un système triangulaire:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & = & b_1 \\ 0 & +a'_{22}x_2 & +a'_{23}x_3 & = & b'_2 \\ 0 & +0 & +a''_{33}x_3 & = & b''_3 \end{array} \right.$$

Exemple 1.3.1 *Soit à résoudre le système:*

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} 3x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 7 \\ 4x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 4 \end{array} \right.$$

nous allons construire un système équivalent. On ne change pas la première équation.

A la $2^{\text{ème}}$ (resp $3^{\text{ème}}$) équation, on ajoute le produit par $-\frac{2}{3}$ (resp $-\frac{4}{3}$) de la première equation de façon à annuler le coefficient de x_1 de la $2^{\text{ème}}$ (resp $3^{\text{ème}}$) équation.

On obtient alors:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} 3x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & 2 \\ & \frac{7}{3}x_2 & +\frac{1}{3}x_3 & = & \frac{17}{3} \\ & -\frac{1}{3}x_2 & +\frac{2}{3}x_3 & = & \frac{4}{3} \end{array} \right.$$

On recommence le processus. On ne change pas les deux premières équations. A la $3^{\text{ème}}$ équation, on ajoute le produit par $-\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{1}{7}$ de la deuxième équation.

On obtient finalement:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} 3x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & 2 \\ & \frac{7}{3}x_2 & +\frac{1}{3}x_3 & = & \frac{17}{3} \\ & & +\frac{5}{7}x_3 & = & \frac{15}{7} \end{array} \right.$$

Ce système, équivalent au premier, est triangulaire et peut se résoudre par technique précédente.

D'ou $x_3 = 3$ de la $3^{ème}$ équation, $x_2 = 2$ de la $2^{ème}$ equation et $x_1 = 1$ de la $1^{ère}$ équation.

On peut aussi traiter le même exemple en choisissant une écriture matricielle.

Soit $A^{(1)}$ la matrice du 1^{er} système,

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

la matrice $A^{(2)}$ du $2^{ème}$ système,

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

En multipmiant à gauche A par $M^{(1)}$: $A^{(2)} = M^{(1)}A^{(1)}$, avec

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De même $A^{(3)} = M^{(2)}A^{(2)}$, avec

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{7} \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad M^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix}$$

Donc $A^{(3)} = M^{(2)}M^{(1)}A$.

Comme $M^{(1)}$ et $M^{(2)}$ sont inversible car ce sont deux matrices triangulaire dont la diagonale est formée de 1, on peut exprimer A en fonction de $A^{(3)}$.

$$\begin{aligned} A &= \left(M^{(2)}.M^{(1)}\right)^{-1} A^{(3)} \\ &= \left(M^{(2)}\right)^{-1} . \left(M^{(1)}\right)^{-1} A^{(3)} \end{aligned}$$

Or $M^{(1)}$ a pour inverse:

$$\left(M^{(1)}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et $M^{(2)}$ a pour inverse:

$$\left(M^{(2)}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix}$$

On remarque que ces matrices inverses sont obtenues sans calcul: il suffit de transformer en leur opposée les termes figurant sous la diagonale, les autres termes sont inchangés. Alors:

$$\left(M^{(1)}\right)^{-1} . \left(M^{(2)}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix}$$

Posons $A^{(3)} = U$ et $L = \left(M^{(1)}\right)^{-1} . \left(M^{(2)}\right)^{-1}$.

On a décomosé $A = L.U$ en un produit d'une matrice triangulaire inférieure L ayant des 1 sur la diagonale par une matrice triangulaire supérieure U.

Nous somme amenés à résoudre successivement les deux systèmes:

$$\begin{aligned} Ly &= b, \\ Ux &= y. \end{aligned}$$

Tout ceci se généralise à une matrice d'ordre n.

1.3.2 Le cas général

On considère le système linéaire $(S) : Ax = b$ en supposant toujours que A est inversible et on pose $b^{(1)} = b$ et $A^{(1)} = A = (a_{i,j}^{(1)})$. Le système (S) s'écrit alors $A^{(1)}x = b^{(1)}$ que l'on note $S^{(1)}$.

$$\left(A^{(1)} \vdots b^{(1)}\right) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \cdots & a_{1,n}^{(1)} & \vdots & b_1^{(1)} \\ a_{2,1}^{(1)} & a_{2,2}^{(1)} & & a_{2,n}^{(1)} & \vdots & b_2^{(1)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}^{(1)} & a_{n,2}^{(1)} & \cdots & a_{n,n}^{(1)} & \vdots & b_n^{(1)} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ \vdots \\ L_n^{(1)} \end{array}$$

Etape 1: Si $a_{1,1}^{(1)} \neq 0$ (sinon on fait une permutation de lignes) on fait l'affectation suivante:

$$\begin{cases} L_1^{(2)} \longleftarrow L_1^{(1)} \\ L_i^{(2)} \longleftarrow L_i^{(1)} - \alpha_{i,1} L_1^{(1)} \quad \text{où } \alpha_{i,1} = \frac{a_{i,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}},\ i = 2, ..., n \end{cases}$$

On obtient alors un nouveau système $S^{(2)} : A^{(2)}x = b^{(2)}$ avec

$$\begin{cases} a_{1,j}^{(2)} = a_{1,j}^{(1)}\ ,\ j = 1, ..., n \\ a_{i,1}^{(2)} = 0\ ,\ i = 2, ..., n \\ a_{i,j}^{(2)} = a_{i,j}^{(1)} - \alpha_{i,1} a_{1,j}^{(1)}\ ,\ i, j = 2, ..., n \\ b_1^{(2)} = b_1^{(1)} \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \alpha_{i,1} b_1^{(1)}\ ,\ i = 2, ..., n \end{cases} .$$

La matrice $A^{(2)}$ et le vecteur $b^{(2)}$ sont donc de la forme:

$$\left(A^{(2)} \vdots b^{(2)}\right) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \cdots & a_{1,n}^{(1)} & \vdots & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & & a_{2,n}^{(2)} & \vdots & b_2^{(2)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(2)} & \cdots & a_{n,n}^{(2)} & \vdots & b_n^{(2)} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} \\ \vdots \\ L_n^{(2)} \end{array}$$

A la $k^{ième}$ étape : Si $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$: **" le $k^{ième}$ pivot de l'élimination de Gauss "** (sinon on fait une permutation de lignes) on fait l'affectation suivante:

$$\begin{cases} L_i^{(k+1)} \longleftarrow L_i^{(k)},\ i = 1, ..., k \\ L_i^{(k+1)} \longleftarrow L_i^{(k)} - \alpha_{i,k} L_k^{(k)} \quad \text{où } \alpha_{i,k} = \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}},\ i = k+1, ..., n \end{cases}$$

On obtient alors un nouveau système $S^{(k+1)} : A^{(k+1)}x = b^{(k+1)}$ avec

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{r} a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} \ , \ j = 1, ..., n \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} \end{array}\right. \ , i = 1, ..., k \\ a_{i,j}^{(k+1)} = 0 \ , \ j = 1, ..., k, \ \ i = k+1, ..., n \\ \left\{\begin{array}{l} a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} - \alpha_{i,k} a_{k,j}^{(k)} \ , \ i, j = k+1, ..., n \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \alpha_{i,k} b_k^{(k)} \ , \ i = k+1, ..., n \end{array}\right. \end{array}\right. .$$

La matrice $A^{(k+1)}$ et le vecteur $b^{(k+1)}$ sont donc de la forme:

$$\left(A^{(k+1)} \vdots b^{(k+1)}\right) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccccccc} a_{1,1}^{(k)} & a_{1,2}^{(k)} & \cdots & & a_{1,k}^{(k)} & \cdots & \cdots & a_{1,n}^{(k)} & \vdots & b_1^{(k)} \\ 0 & a_{2,2}^{(k)} & & & a_{2,k}^{(k)} & \cdots & \cdots & a_{2,n}^{(k)} & \vdots & b_2^{(k)} \\ 0 & & a_{3,3}^{(k)} & & a_{3,k}^{(k)} & \cdots & \cdots & a_{3,n}^{(k)} & \vdots & b_3^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{k,k}^{(k)} & \cdots & \cdots & a_{k,n}^{(k)} & \vdots & b_k^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & 0 & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k+1)} & \vdots & b_{k+1}^{(k+1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_{n,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{n,n}^{(k+1)} & \vdots & b_n^{(k+1)} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} L_1^{(k+1)} \\ L_2^{(k+1)} \\ L_3^{(k+1)} \\ \vdots \\ L_k^{(k+1)} \\ L_{k+1}^{(k+1)} \\ \vdots \\ L_n^{(k+1)} \end{array}$$

Etape (n-1): Le système $S^{(n)} : A^{(n)}x = b^{(n)}$ obtenu est triangulaire supérieure avec

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(n)} & a_{1,2}^{(n)} & \cdots & a_{1,n}^{(n)} \\ 0 & a_{2,2}^{(n)} & \cdots & a_{2,n}^{(n)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{n,n}^{(n)} \end{pmatrix} \text{ et } b^{(n)} = \begin{pmatrix} b_1^{(n)} \\ b_2^{(n)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix}.$$

et peut donc être résolu par l'algorithme de substitution rétrograde.

1.4 Interprétation matricielle de l'élimination de Gauss: la factorisation LU

Matriciellement, On a:

$$\begin{aligned} A^{(k+1)} &= M^{(k)}A^{(k)}, \quad \text{donc } A^{(k)} = \left(M^{(k)}\right)^{-1} A^{(k+1)} \\ A^{(k)} &= \left(M^{(k)}\right)^{-1} A^{(k+1)}, \quad \text{avec } L^{(k)} = \left(M^{(k)}\right)^{-1} \end{aligned}$$

$$L^{(k)} = k^{i\grave{e}me} \text{ ligne} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & \frac{a_{k+1,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{a_{n,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De sorte que:

$$A = A^{(1)} = L^{(1)}.L^{(2)} \cdots L^{(n-1)}.A^{(n)}.$$

Posons $A^{(n)} = U$ matrice triangulaire supérieure et $L = L^{(1)}.L^{(2)} \cdots L^{(n-1)}$ matrice triangulaire inférieure, nous avons: $A = L.U$ avec:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{a_{2,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} & 1 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{a_{3,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} & \frac{a_{3,2}^{(2)}}{a_{2,2}^{(2)}} & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \frac{a_{k+1,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & 0 \\ \frac{a_{n,1}^{(1)}}{a_{1,1}^{(1)}} & \frac{a_{n,2}^{(2)}}{a_{2,2}^{(2)}} & & \frac{a_{n,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} & & \frac{a_{n,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}} & 1 \end{pmatrix}.$$

et

$$U = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & a_{1,3}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1,n}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & a_{2,3}^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & a_{3,3}^{(3)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{3,n}^{(3)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{k,k}^{(k)} & \cdots & a_{k,n}^{(k)} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n,n}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc factorisé la matrice A, à une permutation près, en produit $L.U$ de deux matrices triangulaires.

Nous somme amenés à résoudre successivement les deux systèmes:

$$\begin{aligned} Ly &= b, \\ Ux &= y. \end{aligned}$$

Exercice 1.4.1 *Soit (S) le système linéaire suivant:*

$$(S) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14. \end{cases}.$$

1. *Ecrire le système (S) sous la forme matricielle $AX = b$.*
2. *Résoudre par la méthode de Gauss le système (S).*
3. *Déduire une décomposition de la matrice A, $(A = LU)$, comme produit d'une matrice triangulaire inférieure L par une matrice triangulaire supérieure U.*
4. *Calculer le déterminant de la matrice A.*
5. *Ecrire un algorithme qui permet de résoudre un système linéaire par la méthode de Gauss.*

1.5 Les TP

Exercice 1.5.1 ***Système linéaire triangulaire inferieure***

Rappel: Algorithme de substitution progressive

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_{1,1}}, \\ x_i = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j\right), \ pour\ i = 2, 3, ..., n \end{cases}$$

*1. Ecrire une fonction **x=forsub(A,b)** qui résout un système d'équations triangulaire inferieure $Ax = b$ par la méthode de substitution progressive.*

2. Vérifier le bon fonctionnement de votre fonction avec le système suivant

$$(S) : \begin{cases} \frac{3}{2}x_1 = 3, \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{7}{2}, \\ -4x_1 + \frac{3}{7}x_2 - 3x_3 = -12. \end{cases}.$$

Exercice 1.5.2 ***Système linéaire triangulaire supérirure***

Rappel: Algorithme de substitution rétrograde*:*

$$\begin{cases} x_n = \frac{bn}{a_{n,n}}, \\ x_i = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j\right), \ pour\ i = n-1, ..., 1 \end{cases}.$$

*1. Ecrire une fonction **x=backsub(A,b)** qui resout un système d'équations triangulaire supérirure $Ax = b$ par la méthode de substitution rétrograde.*

2. Vérifier le bon fonctionnement de votre fonction avec le système suivant

$$(S) : \begin{cases} \frac{3}{2}x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 1, \\ -7x_2 - x_3 = -17, \\ \frac{3}{4}x_3 = \frac{9}{4}. \end{cases}.$$

Exercice 1.5.3 ***Méthodes d'élimination de Gauss***

Rappel: Algorithme d'élimination de Gauss*:*

- *On commence par le remplissage de la matrice augmentée A du système qui n'est autre que l'augmentation de la matrice du système $Ax = b$ d'une colonne contenant le vecteur des données: $A = \left(A \vdots b\right)$. La dimension de la matrice A sera de n lignes et $n + 1$ colonnes.*

- *Ensuite, on programme l'algorithme d'élimination de Gauss qui va triangulariser la matrice A. Il procède de la manière suivante :*

$$\begin{cases} \text{Pour } k = 1 \text{ jusqu'à } n-1\text{:} \\ L_i \longleftarrow L_i - \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} L_k \quad \text{avec } i = k+1, ..., n \end{cases}.$$

- *Et enfin, on extrait la solution du système suivant l'algorithme de substitution rétrograde:*

$$\begin{cases} x_n = \frac{bn}{a_{n,n}}, \\ x_i = \frac{1}{a_{i,i}} \left(a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j \right), \ \text{pour } i = n-1, ..., 1 \end{cases}.$$

*1. Ecrire une fonction **x=GaussSyst(A,b)** qui utilise la méthode de Gauss pour résoudre un système linéaire $Ax = b$.*

2. Vérifier le bon fonctionnement de votre fonction avec le système suivant

$$(S) : \begin{cases} 10x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 4, \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 3, \\ 8x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 9x_4 = 3, \\ 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 1. \end{cases}.$$

Exercice 1.5.4 ***Méthode de factorisation*** LU

Rappel: Algorithme de la factorisation LU

- *On commence par trouver les matrices L et U obtenues à partir de factoriser la matrice A sous la forme $A = LU$; où L est une matrice trangulaire inférieure et U est une matrice trangulaire supérieure suivant l'algorithme de factorisation:*

  On pose $l_{k,k} = 1$. Ensuite, pour $k = 1, ..., n$ on calcule d'abord la $k^{\text{ième}}$ ligne de U, puis la $k^{\text{ième}}$ colonne de L, selon les formules:

$$\begin{cases} u_{k,j} = a_{k,j} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{k,r} u_{r,j}, \ \text{pour } j = k, ..., n, \\ l_{i,k} = \frac{1}{u_{k,k}} \left(a_{i,k} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{i,r} u_{r,k} \right), \ \text{pour } i = k+1, ..., n. \end{cases}.$$

Alors le système $Ax = b \Longleftrightarrow LUx = b \Longleftrightarrow \begin{cases} Ux = y \\ Ly = b \end{cases}.$

- *On extrait la solution du système trangulaire inférieure* $Ly = b$ *suivant l'algorithme de substitution progressive, puis le système trangulaire supérieure* $Ux = y$ *suivant l'algorithme de substitution rétrograde.*

1. Ecrire une fonction ***x=ResolutionLU (A,b)*** *qui utilise la méthode de factorisation LU pour résoudre un système linéaire* $Ax = b$*.*

2. Vérifier le bon fonctionnement de votre fonction avec le système suivant

$$(S) : \begin{cases} 10x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 4, \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 3, \\ 8x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 9x_4 = 3, \\ 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 1. \end{cases}.$$