3.1 Analyse combinatoire

L'analyse combinatoire est la science du dénombrement, elle permet de déterminer le nombre de réalisations possible d'une expérience donnée. On y rencontrera des problèmes du type :

- De combien de façons peut-on asseoir 10 convives autour d'une table circulaire ?
- Combien y a-t-il d'issues (résultats possibles) lorsqu'on lance trois dés à 6 faces ?
- Dans une course de 20 chevaux, combien y a-t-il de podiums possibles ?

Les réponses à ce type de problèmes sont souvent des nombres gigantesques (la réponse au premier problème dépasse les 300 mille).

3.1.1 Outils

A. Le tableau

Exemple On lance successivement deux dés à 6 faces. Combien y a-t-il d'issues (résultats possibles) ?

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

Réponse : Il y a $6 \cdot 6 = 36$ résultats possibles.

Inconvénient du tableau : on ne peut pas y mettre plus de deux paramètres (dans l'exemple, on ne pourrait pas y mettre trois dés).

B. La liste

Exemple Combien de nombres peut-on composer avec les chiffres 1, 2, 3 et 4?

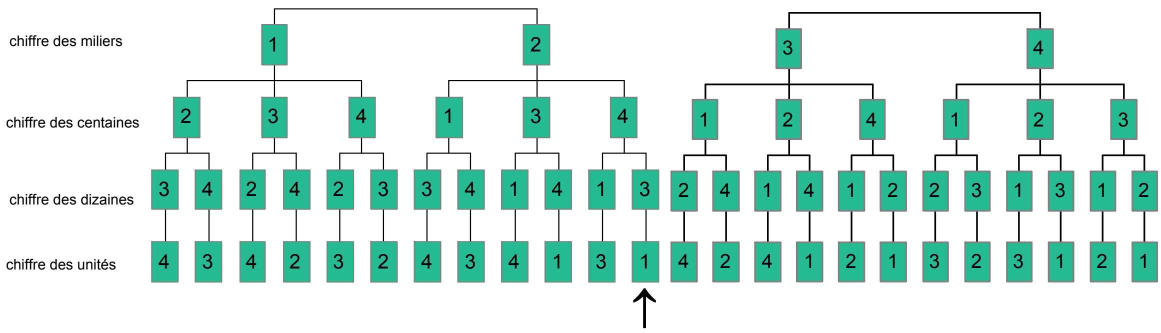
1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Réponse : On peut composer avec les chiffres 1, 2, 3 et 4 exactement 24 nombres.

Inconvénient de la liste : très long, et on risque d'oublier des éléments ou de les mettre plusieurs fois.

C. L'arbre de classement

Exemple Combien de nombres peut-on composer avec les chiffres 1, 2, 3 et 4?



L'arbre se lit verticalement (par exemple: la flèche indique le nombre 2431). Il est plus sûr que la liste, car de par sa symétrie, on voit s'il y a des doublons ou des éléments manquants. Il peut d'ailleurs être complété de façon partielle ou schématique selon la question qui nous intéresse.

Définition

Un ***arbre de classement*** est un schéma permettant de décrire et de dénombrer tous les résultats possibles d'une expérience donnée.

D. La notation factorielle

Sur l'exemple précédent, on voit que le premier étage comporte 4 embranchements, le deuxième 3, le troisième 2 et le dernier 1 seul. L'arbre comporte donc $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ chemins. On peut ainsi extrapoler et deviner que si l'on rajoute un chiffre à l'énoncé, (càd: "Combien de nombres peut-on former avec les chiffres 1, 2, 3, 4 et 5?") on va trouver $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ possibilités.

On a recours à la notation suivante :

Définition

Soit n un entier positif ou nul. On appelle ***n factorielle***, noté ***n!***, le produit des nombres entiers de *1* à *n*.

$$\mathbf{n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots . \cdot n & \text{si } n > 0 \end{cases}}$$

Exemples

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$

$69! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots\ldots . \cdot 68 \cdot 69 \;\cong\; 1{,}71 \cdot 10^{98}$

$0! = 1$

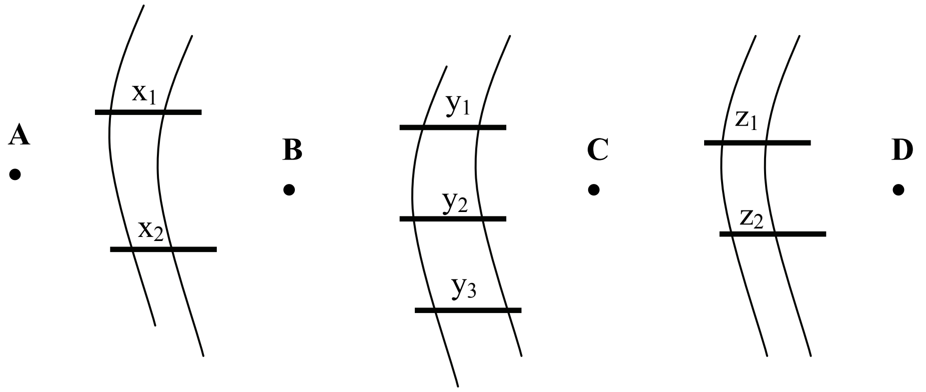
$70! = \ldots\ldots .$ dépasse les capacités des calculatrices courantes !

Remarque Sur certaines calculatrices, la touche $\boxed{x!}$ effectue ce type de calcul.

3.1.2 Principe de décomposition

Activité

Pour aller de la ville **A** à la ville **D**, on doit traverser trois rivières. Sur ces rivières, on dispose de sept ponts x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2. (**B** et **C** sont aussi des villes)



a) Combien y a-t-il de trajets différents de **A** à **D** ? *(sans passer deux fois par la même ville…)*

b) Ajoutons deux ponts z_3 et z_4 sur la rivière située entre les villes **C** et **D**.
Combien y a-t-il de trajets différents de **A** à **D** ? *(sans passer deux fois par la même ville…)*

c) Ajoutons une ville **E** et une rivière située entre les villes **D** et **E** avec deux ponts w_1 et w_2.
Combien y a-t-il de trajets différents de **A** à **E** ? *(sans passer deux fois par la même ville…)*

Principe de décomposition

Si **une expérience globale** peut se décomposer en **k épreuves élémentaires successives**, ces dernières pouvant s'effectuer respectivement de $n_1, n_2, ... n_k$ manières, alors l'expérience globale peut se faire de $n_1 \cdot n_2 \cdot .... \cdot n_k$ manières différentes.

C'est ce principe fondamental qui sera utilisé dans les paragraphes suivants pour aboutir aux formules les plus utiles de l'analyse combinatoire.

Exemples

a) On lance successivement trois dés à 6 faces (une expérience globale).
Combien y a-t-il d'issues possibles ? $\{(121),(641),.......\}$
Réponse :

$\boxed{D_1} = 6$ (6 chiffres distincts)

$\boxed{D_2} = 6$ (6 chiffres distincts)

$\boxed{D_3} = 6$ (6 chiffres distincts)

Selon le principe de décomposition (3 épreuves), le nombre d'issues possibles est de $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

b) On veut imprimer une plaque de voiture comportant de gauche à droite, 2 lettres distinctes et 3 chiffres, le premier est différent de zéro (une expérience globale).

A combien s'élève le nombre de plaques de ce type ? $\{(CH124),(DE665),........,.......\}$

Réponse :

$\boxed{L_1} = 26$ (26 lettres possibles)

$\boxed{L_2} = 25$ (pour avoir des lettres distinctes)

$\boxed{C_3} = 9$ (sans le zéro)

$\boxed{C_4} = 10$

$\boxed{C_5} = 10$

Selon le principe de décomposition (5 épreuves), le nombre possible de plaques de ce type est de $26 \cdot 25 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 585'000$.

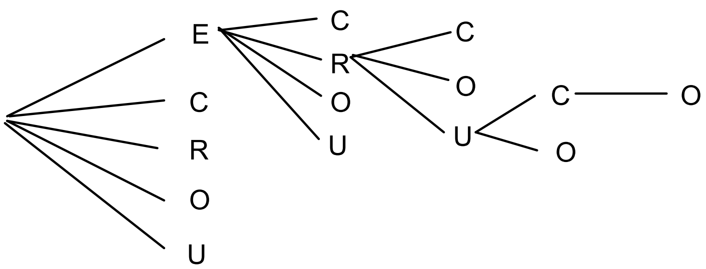
Remarque Dans les exemples précédents a) et b), la représentation de l'expérience globale avec un arbre de classement n'est pas conseillée car le nombre de possibilités est trop élevée.

3.1.3 Permutations

Exemple

Combien de "mots" différents peut-on écrire avec toutes les lettres du mot ECROU ?

Réponse : Selon le principe de décomposition (5 épreuves) :



1ère lettre : 5 possibilités

2ème lettre : 4 possibilités

3ème lettre : 3 possibilités

4ème lettre : 2 possibilités

5ème lettre : 1 possibilité

Au total : $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! =$ **120 possibilités**

Définition

Si on classe dans un ordre particulier ***n éléments distincts***, on forme une ***permutation simple*** (de ces n éléments).

Remarque Il y a dans l'exemple ci-dessus 120 permutations du "mot" ECROU.

Autres exemple

a) Combien de *mots* différents peut-on former à l’aide des 7 lettres distinctes A, B, C, D, E, F, G ?
Réponse : Il y a $P_7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$ mots différents.

b) De combien de façons différentes peut-on asseoir 5 personnes sur un banc ?
Réponse : $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ possibilités.

En généralisant et en utilisant le principe de décomposition, le nombre $\mathbf{P_n}$ **de permutations simples** est : $\boxed{\mathbf{P_n = n!}}$

Question Combien de *mots* différents peut-on écrire avec toutes les lettres du mot ERRER ?
Partons des permutations simples du mot ER®er : on en trouve 5·4·3·2·1= 5! = 120. Mais parmi celles-ci, certaines sont indiscernables si l'on emploie le même graphisme pour toutes les lettres :

En partant du mot ERRER, on en trouve 6 en permutant les **trois r** (3!) :

ER®er
ERre®
E®Rer
E®reR
ErRe®
Er®eR

Puis, on peut multiplier par 2 ces possibilités en permutant les **deux e** (2!) :

eR®Er
eRrE®
e®REr
e®rER
erRE®
er®ER

Nous avons donc 5! = 120 permutations simples pour le mot ERRER ; on en compte 12 fois trop.

Ils sont donc au nombre de $\frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$: RRREE RREER RERER ERRRE ERERR RRERE RERRE REERR ERRER EERRR

Définition

Si on classe dans un ordre particulier ***n éléments*** dont $\boldsymbol{n_1}$ sont identiques de type 1, $\boldsymbol{n_2}$ sont identiques de type 2,…….., $\boldsymbol{n_k}$ sont identiques de type k, on forme une ***permutation avec répétitions*** (de ces n éléments).

En généralisant et en utilisant le principe de décomposition, le nombre $\overline{\mathbf{P}}_n(\mathbf{n_1, n_2, ..., n_k})$ **de permutations avec répétitions** est :

$$\boxed{\overline{\mathbf{P}}_n(\mathbf{n_1, n_2, ..., n_k}) = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}}}$$

Remarques **a)** $\overline{P}_n(n_1, n_2, ..., n_k) < P_n$ **b)** La barre sur le P signifie "avec répétitions".

3.1.4 Arrangements

Exemple

Dans une course de 10 chevaux, combien peut-il y avoir de podiums différents (un podium comporte 3 places) ?

Réponse : Selon le principe de décomposition (3 épreuves) :

$$\left.\begin{array}{l}\text{1ère place: 10 possibilités}\\ \text{2ème place: 9 possibilités}\\ \text{3ème place: 8 possibilités}\end{array}\right\}\quad \text{Au total : } 10\cdot 9\cdot 8 = 720 \text{ possibilités.}$$

On peut arriver à ce résultat en utilisant la notation factorielle : $10\cdot 9\cdot 8 = \dfrac{10!}{7!} = \dfrac{10!}{(10-3)!}$

Définition

Si, parmi ***n éléments distincts***, on choisit ***r éléments distincts*** ($r \leq n$) en les classant dans un **ordre particulier**, on forme un ***arrangement simple*** (de r éléments choisis parmi n).

Autre exemple

Après les prolongations d'un match de football le nombre de façons de choisir les 5 tireurs de penalties parmi les onze joueurs et l'ordre de passage : $\dfrac{11!}{(11-5)!} = \dfrac{11!}{6!} = 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11 = 55'440$

En généralisant et en utilisant le principe de décomposition, le nombre $\mathbf{A_r^n}$ **d'arrangement simples** est :

$$\boxed{\mathbf{A_r^n = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\ldots\cdot(n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}}}$$

Remarques

a) Si $r = n$, $A_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = n! = P_n$; les permutations sont un cas particulier des arrangements.

b) Sur certaines calculatrices, la touche $\boxed{\textit{nPr}}$ effectue ce type de calcul.

Question

Combien de mots différents de 4 lettres peux-t-on former à l'aide des 7 lettres A, B, C, D, E, F, G si on peut répéter les lettres dans les mots ?

Réponse : Selon le principe de décomposition (4 épreuves) :
Il y a $7\cdot 7\cdot 7\cdot 7 = 7^4 = 2401$ mots différents

Définition

Si, parmi ***n éléments distincts***, on choisit ***r éléments distincts ou non*** (on peut choisir plusieurs fois le même) en les classant dans un **ordre particulier**, on forme un ***arrangement avec répétitions*** (de r éléments choisis parmi n).

Exemples

Combien de séquences différentes peut-on lire sur un compteur kilométrique de voiture à 6 chiffres ?

Réponse : Selon le principe de décomposition (6 épreuves)
Il y a $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6 = 1'000'000$ choix.

En généralisant et en utilisant le principe de décomposition, le nombre $\overline{\mathbf{A}_r^n}$ **d'arrangement avec répétitions** est :

$$\boxed{\overline{\mathbf{A}_r^n} = \mathbf{n}^\mathbf{r}}$$

Remarque La barre sur le A signifie "avec répétitions".

3.1.5 Combinaisons

Exemple Combien de sous-ensembles de 3 lettres, ***sans tenir compte de l'ordre***, peut-on former à l'aide des 4 lettres distinctes $\{A, B, C, D\}$?

Réponse : Si l'on tient compte de l'ordre, voici le nombre de possibilités : $A_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$

ABC ACB BAC BCA CAB CBA	ABD ADB BAD BDA DAB DBA	ADC ACD DAC DCA CAD CDA	DBC DCB BDC BCD CDB CBD

Or, chacune des colonnes donne les mêmes lettres, qui est alors compté 6 fois (les 3! permutations du trio). Par conséquent, si l'on ne tient pas compte de l'ordre, comme c'est le cas pour les combinaisons, il faut diviser le nombre d'arrangements simples par 3! : $C_3^4 = \frac{A_3^4}{3!} = \frac{4!}{(4-3)!3!} = 4$

Définition

Si, parmi ***n éléments distincts***, on choisit ***r éléments distincts*** ($r \leq n$) sans les classer dans un **ordre particulier**, on forme une ***combinaison simple*** (de *r* éléments choisis parmi *n*).

Autrement dit : une combinaison est un arrangement dans lequel l'ordre ne compte pas.

Autre exemple

De combien de façons différentes peut-on asseoir 5 personnes sur un banc de 3 places si la place sur le banc est indifférente ?

Réponse : $C_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!3!} = 10$ façons.

En généralisant et en utilisant le principe de décomposition, le nombre $\mathbf{C_r^n}$ **de combinaisons simples** est : $\boxed{\mathbf{C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}}}$

Remarques

a) $\boxed{C_r^n = \frac{A_r^n}{P_r}}$ $\Leftrightarrow$ $A_r^n = P_r \cdot C_r^n$ **b)** $A_r^n \geq C_r^n$

c) Autre notation : $C_r^n = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ "coefficients binomiaux".

d) Sur certaines calculatrices, la touche $\boxed{nCr}$ effectue ce type de calcul.

3.1.6 Développement du binôme

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

....

Exemple Développons le binôme suivant : $(a+b)^4 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$

• $\mathbf{a^4}$ ne s'obtient que **d'une seule façon** ; $(\mathbf{a}+b)\cdot(\mathbf{a}+b)\cdot(\mathbf{a}+b)\cdot(\mathbf{a}+b) = \mathbf{a^4}+.....$

Autrement dit : $\boxed{C_0^4 = 1}$

• $\mathbf{a^3b}$ s'obtient de **4 façons différentes.** On choisit un **b** dans **une** parenthèse, et un **a** dans les **trois** autres : $(\mathbf{a}+b)\cdot(a+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+b)\cdot(\mathbf{a}+b) = ...+\mathbf{a^3b}+.....$

Autrement dit, on fait un choix (non ordonné) de une parenthèse parmi quatre : $\boxed{C_1^4 = 4}$

• $\mathbf{a^2b^2}$ s'obtient de **6 façons différentes**. On choisit un **b** dans **deux** parenthèses, et un **a** dans les **deux** autres : $(\mathbf{a}+b)\cdot(a+\mathbf{b})\cdot(a+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+b) = ...+\mathbf{a^2b^2}+.....$

Autrement dit, on fait un choix (non ordonné) de deux parenthèses parmi quatre : $\boxed{C_2^4 = 6}$

• $\mathbf{ab^3}$ s'obtient de **4 façons différentes**. On choisit un **b** dans **trois** parenthèses, et un **a** dans la **dernière** : $(a+\mathbf{b})\cdot(a+\mathbf{b})\cdot(a+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+b) = ...+\mathbf{ab^3}+.....$

Autrement dit, on fait un choix (non ordonné) de trois parenthèses parmi quatre : $\boxed{C_3^4 = 4}$

• $\mathbf{b^4}$ ne s'obtient que **d'une seule façon**. On choisit un **b** dans **quatre** parenthèses : $(a+\mathbf{b})\cdot(a+\mathbf{b})\cdot(a+\mathbf{b})\cdot(a+\mathbf{b}) = ...+\mathbf{b^4}$

Autrement dit, on fait un choix (non ordonné) de quatre parenthèses parmi quatre : $\boxed{C_4^4 = 1}$

En conclusion : $(a+b)^4 = C_0^4\cdot a^4b^0 + C_1^4\cdot a^3b^1 + C_2^4\cdot a^2b^2 + C_3^4\cdot a^1b^3 + C_4^4\cdot a^0b^4$

$$= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

Autre exemple : $(a+b)^5 = C_0^5\cdot a^5b^0 + C_1^5\cdot a^4b^1 + C_2^5\cdot a^3b^2 + C_3^5\cdot a^2b^3 + C_4^5\cdot a^1b^4 + C_5^5\cdot a^0b^5$

En **généralisant** le processus, on obtient :

$$(a+b)^n = C_0^n\cdot a^nb^0 + C_1^n\cdot a^{(n-1)}b^1 + C_2^n\cdot a^{(n-2)}b^2 + \ldots + C_{n-2}^n\cdot a^2b^{(n-2)} + C_{n-1}^n\cdot a^1b^{(n-1)} + C_n^n\cdot a^0b^n$$

noté $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n\cdot a^{(n-i)}b^i$

(La démonstration de cette relation ce fait par récurrence)

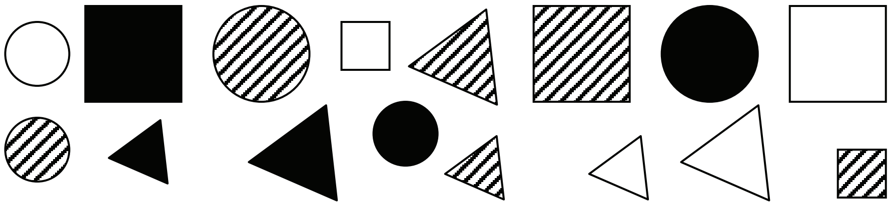
Propriétés du binôme **1)** $C_0^n = C_n^n = 1$ **2)** $C_p^n = C_{n-p}^n$ **3)** $C_p^n + C_{p+1}^n = C_{p+1}^{n+1}$

Démonstration en exercice.

Exercices (Arbre de classement)

1) On lance une pièce de monnaie et on s'arrête dès qu'on a obtenu trois fois le même côté. Construire un arbre représentant cette situation. Combien y a-t-il d'issues ?

2) Observer les figures ci-dessous. Faire une liste des critères qui les différencient et décrire à l'aide d'un arbre toutes les possibilités. Quelles figures manquent sur le dessin ?



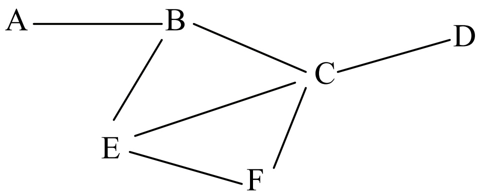
3) On désire se rendre de la case **A** à la case **X**. Les seuls déplacements autorisés sont des déplacements d'une case vers la droite ou d'une case vers le bas.

Combien y a-t-il de chemins différents allant de la case **A** à la case **X** ?

A	
	X

A		
		X

4) Le diagramme ci-dessous représente des îles : A, B, C, D, E et F. Certaines d'entre elles sont reliées par des ponts. Un touriste part de l'île A et va d'île en île. Il s'arrête pour déjeuner lorsqu'il ne peut plus continuer sans repasser sur un pont qu'il a déjà traversé lors de sa promenade. Quel est le nombre de chemins différents qu'il peut prendre avant de déjeuner ?

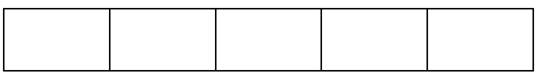


Exercices (Principe de décomposition)

5) a) Avec les chiffres 2,3,5,6,7,9 combien peut-on avoir de nombres de 3 chiffres ? (avec et sans répétition)

b) Parmi ceux-ci, combien sont inférieurs à 400 ? (avec et sans répétition)
c) Parmi ceux-ci, combien sont pairs ? (avec et sans répétition)
d) Parmi ceux-ci, combien sont impairs ? (avec et sans répétition)
e) Parmi ceux-ci, combien sont multiples de 5 ? (avec et sans répétition)

6) Cette bande, partagée en 5 cases, doit être coloriée (case par case) et l'on dispose de 8 couleurs.



De combien de manières peut-on procéder si deux cases adjacentes doivent être de couleurs différentes ?

7) Combien y a-t-il d'issues possibles lorsqu'on lance quatre dés à 6 faces ?

8) Douze joueurs d'échec participent à un tournoi dans lequel chaque joueur joue une fois contre chacun des autres joueurs. Combien y a-t-il de parties disputées ?

Exercices (Notation factorielle)

9) Simplifier et calculer les expressions suivantes :

$$\frac{7!}{6!} \qquad \frac{20!}{18!} \qquad \frac{8!}{7!\cdot 4!} \qquad \frac{100!}{98!} \qquad \frac{1}{4!}-\frac{1}{5!} \qquad \frac{20!}{(20-4)!} \qquad \frac{24!}{(24-4)!4!}$$

Simplifier les expressions suivantes : $\frac{n!}{(n-1)!} \qquad \frac{(n+2)!}{(n-1)!} \qquad \frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!}$

Exercices (Permutations)

10) Combien de « mots » différents peut-on former avec les lettres des mots suivants :
(Attention, les mots formés ne doivent pas forcément avoir un sens)

a) eux **b)** utile **c)** parmi ?

11) Soient 3 personnes

a) De combien de manières différentes peut-on les mettre en rang ?
b) De combien de manières peut-on les asseoir autour d'une table circulaire ?
c) Mêmes questions qu'en a) et b), mais avec 4 personnes !

12) **a)** De combien de façons, peut-on asseoir sur un banc 3 garçons et 2 filles ?
b) Même question avec la condition supplémentaire que les garçons restent ensemble et les filles aussi.
c) Même question, mais les filles s'assoient ensemble.

13) Combien de mots différents peut-on écrire avec les lettres du mot :
a) arranger **b)** rire ?

14) Combien de numéros de plaques différents peut-on former avec les numéros de la plaque CH 10902100.

15) **a)** Combien de mots différents peut-on écrire avec les lettres du mot : ELEVES.
b) Combien de ces mots commencent et finissent par E ?
c) Combien sont ceux où les trois E sont adjacents ?
d) Combien commencent par E et se terminent par S ?

Exercices (Arrangements / Combinaisons)

16) De combien de façons peut-on former une cordée de 3 hommes en les choisissant parmi 10 alpinistes ? (l'ordre à une importance !)

17) On doit envoyer 7 lettres, mais on ne dispose que de 4 timbres. Combien y a-t-il de choix d'envoi possibles ?