

Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires

On rappelle que les méthodes itératives ne s'appliquent que dans le cas de systèmes à coefficients dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1.1 Notions générales

1.1.1 Modèle général d'un schéma itératif

On considère une matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{k})$ inversible, un vecteur $b \in \mathbb{k}^n$ et un système linéaire

$$(S) : Ax = b,$$

Le principe général d'une méthode itérative pour résoudre (S) est de générer une suite de vecteurs qui converge vers la solution $A^{-1}b$. Pour ce faire l'idée est d'écrire le système (S) sous une forme équivalente permettant de voir la solution comme le point fixe d'une certaine fonction, e.g.:

$$(S) \iff Bx + c = x,$$

avec $B \in M_{n \times n}(\mathbb{k})$ et $c \in \mathbb{k}^n$ bien choisis c'est-à-dire $I - B$ inversible et $c = (I - B)A^{-1}b$. Par exemple, si $A = M - N$ pour deux matrices $M, N \in M_{n \times n}(\mathbb{k})$ avec M

inversible, on peut choisir $B = M^{-1}N$ et $c = M^{-1}b$. Dans la suite on supposera toujours que $B \in M_{n \times n}(\mathbb{k})$ et $c \in \mathbb{k}^n$ sont choisis tels que $I - B$ inversible et $c = (I - B)A^{-1}b$ (e.g., méthode itérative consistante). On se donne alors un vecteur $x^{(0)} \in \mathbb{k}^n$ et on construit une suite de vecteurs $x^{(k)} \in \mathbb{k}^n$ à l'aide du schéma itératif

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \quad k = 1, 2, \dots$$

Si la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors elle converge vers la solution $A^{-1}b$ de (S) . En effet, si elle existe, la limite x^* est un point fixe de la fonction $x \rightarrow Bx + c$, i.e., vérifie $x^* \rightarrow Bx^* + c$ qui est équivalent à $Ax^* = b$.

La mise en oeuvre pratique d'une méthode itérative de la forme $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ nécessite la donnée d'un point de départ $x^{(0)}$ (en général, sauf si l'on possède des informations a priori sur la solution, on choisit le vecteur nul) et d'une tolérance sur la solution que l'on cherche à calculer. On calcule ensuite les itérés $x^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$ en utilisant la formule $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ jusqu'à ce que le résidu $b - Ax^{(k)}$ soit plus petit que la tolérance.

1.1.2 Convergence

Définition 1.1.1 *La méthode itérative $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ pour résoudre le système $Ax = b$ est dite convergente si pour toute valeur initiale $x^{(0)} \in \mathbb{k}^n$, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} = A^{-1}b$.*

Lemma 1.1.1 *Si la méthode itérative $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ est convergente et si on note $x = A^{-1}b$ la solution alors*

$$x^{(k)} - x = B^k (x^{(0)} - x).$$

Démonstration. On a $c = (I - B)A^{-1}b = (I - B)x$ d'où

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c = x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + (I - B)x$$

ou encore

$$x^{(k+1)} - x = B(x^{(k)} - x)$$

d'où le résultat. ■

Remarquons que $x^{(k)} - x$ représente l'erreur à la k -ième itération de sorte que la formule ci-dessus permet d'estimer cette erreur en fonction de l'erreur initiale.

Le résultat suivant nous donne des critères pour tester la convergence de la méthode itérative $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$.

Théorème 1.1.1 *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. La méthode itérative $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ est convergente;
2. Pour tout $y \in \mathbb{k}^n$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k y = 0$;
3. Pour toute norme matricielle $\|\cdot\|$ sur $M_{n \times n}(\mathbb{k})$, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|B^k\| = 0$.

En pratique, les caractérisations précédentes de la convergence d'une méthode itérative ne sont pas faciles à vérifier. On utilise plutôt le résultat suivant

Théorème 1.1.2 *Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. La méthode itérative $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ est convergente;
2. $\rho(B) < 1$, où $\rho(B)$ désigne le rayon spectral de la matrice B , i.e., le maximum des modules des valeurs propres de B ;
3. Il existe une norme matricielle $\|\cdot\|$ sur $M_{n \times n}(\mathbb{k})$ subordonnée à une norme vectorielle sur \mathbb{k}^n telle que $\|B\| < 1$.

1.1.3 Vitesse de convergence

L'égalité $x^{(k)} - x = B^k (x^{(0)} - x)$ donnée précédemment implique que c'est la norme des puissances de la matrice B qui va nous renseigner sur la vitesse de convergence de la méthode itérative. Nous définissons ici les outils permettant de comparer les vitesses de convergence de différentes méthodes itératives.

Définition 1.1.2 *Considérons le schéma itératif $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ convergent. Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle sur $M_{n \times n}(\mathbb{K})$ et soit k un entier tel que $\|B^k\| < 1$ (l'existence d'un tel k découle du*

théorème 1). On appelle taux moyen de convergence associé à la norme $\|\cdot\|$ pour k itérations de $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ le nombre positif

$$R_k(B) = -\ln \left(\|B^k\|^{\frac{1}{k}} \right).$$

Définition 1.1.3 *Considérons deux méthodes itératives consistantes et convergentes:*

- (1) : $x^{(k+1)} = B_1x^{(k)} + c_1, k = 1, 2, \dots$
- (2) : $x^{(k+1)} = B_2x^{(k)} + c_2, k = 1, 2, \dots$

Soit k un entier tel que $\|B_1^k\| < 1$ et $\|B_2^k\| < 1$. On dit que (1) est plus rapide que (2) relativement à la norme $\|\cdot\|$ si $R_k(B_1) \geq R_k(B_2)$.

En pratique le calcul des $R_k(B)$ est trop coûteux car il nécessite l'évaluation des B^k . On préfère donc estimer le taux asymptotique de convergence.

Définition 1.1.4 *On appelle taux asymptotique de convergence le nombre*

$$R_\infty(B) = \lim_{k \rightarrow +\infty} R_k(B) = -\ln(\rho(B)).$$

Théorème 1.1.3 *Avec les notations précédentes, une méthode itérative est d'autant plus rapide que son taux asymptotique de convergence est grand c'est-à-dire que $\rho(B)$ est petit.*

1.2 Les méthodes itératives classiques

1.2.1 Principe

On considère un système linéaire $(S) : Ax = b$ avec A inversible. L'idée est de déduire un schéma itératif de la décomposition de A sous la forme $A = M - N$ où M est une matrice inversible. En pratique on suppose que les systèmes de matrice M sont « faciles

» à résoudre (par exemple M diagonale, triangulaire, ...). Le système (S) s'écrit alors $Mx = Nx + b$ c'est-à-dire $x = Bx + c$ avec $B = M^{-1}N$ et $c = M^{-1}b$ et on considère le schéma itératif associé

$$x^{(0)} \in \mathbb{K}^n, \quad Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + c, \quad k = 1, 2, \dots$$

Nous allons maintenant considérer trois exemples classiques : les méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et de relaxation. Le point de départ de chacune de ces méthodes est l'unique décomposition de la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ sous la forme $A = D - E - F$ avec:

- $D = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ diagonale, telle que $d_{ii} = a_{ii}$ et $d_{ij} = 0$ pour $i \neq j$;
- $E = (e_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ triangulaire inférieure stricte, telle que $e_{ij} = -a_{ij}$ si $i > j$ et $e_{ij} = 0$ pour $i \leq j$;
- $F = (f_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ triangulaire supérieure stricte, telle que $f_{ij} = -a_{ij}$ si $i < j$ et $f_{ij} = 0$ pour $i \geq j$;

Exemple 1.2.1 *Considérons la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La décomposition de A sous la forme $A = D - E - F$ décrite ci-dessus s'écrit alors

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_D - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_E - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_F$$

On supposera de plus que D est inversible et on distingue les trois méthodes suivantes

- Méthode de Jacobi: $M = D, N = E + F$;
- Méthode de Gauss-Seidel: $M = D - E, N = F$;

- Méthode de relaxation: $M = \frac{1}{\omega} (D - \omega E)$, $N = \frac{1-\omega}{\omega} D + F$ avec ω paramètre réel non nul.

On remarque que la méthode de Gauss-Seidel est un cas particulier de la méthode de relaxation pour $\omega = 1$.

1.2.2 Méthode de Jacobi

On considère un système linéaire $(S) : Ax = b$ avec A inversible. On pose $A = M - N$ avec $M = D$ inversible et $N = E + F$. Le schéma itératif s'écrit alors

$$Dx^{(k+1)} = (E + F)x^{(k)} + b \iff x^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)x^{(k)} + D^{-1}b.$$

Définition 1.2.1 La matrice $B_J = D^{-1}(E + F)$ s'appelle la matrice de Jacobi associée à A .

Mise en œuvre et complexité arithmétique:

On se propose d'estimer le nombre d'opérations à virgule flottante nécessaires pour calculer $x^{(k+1)}$ à partir de $x^{(k)}$. On a $Dx^{(k+1)} = (E + F)x^{(k)} + b$ donc pour tout $i = 1, \dots, n$, $[Dx^{(k+1)}]_i = [(E + F)x^{(k)}]_i + b_i$ c'est-à-dire

$$\begin{aligned} a_{ii}x_i^{(k+1)} &= -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j^{(k)} + b_i \iff x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right] \\ \iff x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Pour calculer $x^{(k+1)}$ à partir de $x^{(k)}$, on a donc besoin de $n - 1$ multiplications, $n - 1$ additions et n divisions soit $2n - 1$ opérations à virgule flottante. Par conséquent il nous faudra $n(2n - 1)$ opérations à virgule flottante pour calculer $x^{(k+1)}$ à partir de $x^{(k)}$, et pour K itérations, on aura besoin de $Kn(2n - 1)$ opérations à virgule flottante. Pour comparaison, pour $n = 1000$, l'élimination de Gauss coûte environ $\frac{2}{3}n^3 = 6,6.10^8$ opérations à virgule flottante alors que par exemple $K = 100$ itérations de la méthode de Jacobi coûtent approximativement $2Kn^2 = 2.10^8$ opérations à virgule flottante.

Théorème 1.2.1 *La méthode de Jacobi converge si et seulement si $\rho(B_J) < 1$.*

Exemple 1.2.2 *Pour la matrice A donnée dans l'exemple précédent, on obtient*

$$B_J = D^{-1}(E + F) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrices B_J sont 0 et $\pm \frac{i\sqrt{5}}{2}$. On a donc $\rho(B_J) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$ et la méthode de Jacobi diverge.

1.2.3 Méthode de Gauss-Seidel

On considère un système linéaire $(S) : Ax = b$ avec A inversible. On pose $A = M - N$ avec $M = D - E$ inversible et $N = F$. Le schéma itératif s'écrit alors

$$(D - E)x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b \iff x^{(k+1)} = (D - E)^{-1}Fx^{(k)} + (D - E)^{-1}b.$$

Définition 1.2.2 *La matrice $B_{GS} = (D - E)^{-1}F$ s'appelle la matrice de Gauss-Seidel associée à A .*

Mise en œuvre et complexité arithmétique:

On se propose d'estimer le nombre d'opérations à virgule flottante nécessaires pour calculer $x^{(k+1)}$ à partir de $x^{(k)}$. On a $(D - E)x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b$ donc pour tout $i = 1, \dots, n$, $[(D - E)x^{(k+1)}]_i = [Fx^{(k)}]_i + b_i$ c'est-à-dire

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} = - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + b_i, \iff x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) \right].$$

La complexité arithmétique de la méthode de Gauss-Seidel est la même que celle de la méthode de Jacobi. Cependant, on peut remarquer que la méthode de Gauss-Seidel est plus intéressante en ce qui concerne la gestion de la mémoire. En effet, on peut écraser au fur et à mesure la valeur de $x^{(k)}$ et ne stocker au cours des calculs qu'un seul vecteur de taille n , e.g., le vecteur $x^{(k+1)}$, au lieu de deux vecteurs pour la méthode de Jacobi.

Théorème 1.2.2 *La méthode de Gauss-Seidel converge si et seulement si $\rho(B_{GS}) < 1$.*

Exemple 1.2.3 *Pour la matrice A donnée dans l'exemple précédent, on obtient*

$$\begin{aligned} B_{GS} &= (D - E)^{-1} F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrices B_{GS} sont 0 et $-\frac{1}{2}$ (de multiplicité 2). On a donc $\rho(B_{GS}) = \frac{1}{2} < 1$ donc la méthode de Gauss-Seidel converge.

1.2.4 Méthode de relaxation

On considère un système linéaire $(S) : Ax = b$ avec A inversible. Soit ω un paramètre réel non nul. On pose $A = M - N$ avec $M = \frac{1}{\omega} (D - \omega E)$ inversible et $N = (\frac{1-\omega}{\omega}) D + F$.

Le schéma itératif s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} (D - \omega E) x^{(k+1)} &= \left(\left(\frac{1-\omega}{\omega} \right) D + F \right) x^{(k)} + b \\ \iff x^{(k+1)} &= (D - \omega E)^{-1} [(1-\omega) D + \omega F] x^{(k)} + \omega (D - \omega E)^{-1} b \\ \iff x_i^{(k+1)} &= (1-\omega) x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Définition 1.2.3 *La matrice $B_{GS} = (D - E)^{-1} F$ s'appelle la matrice de relaxation associée à A et ω est le facteur de relaxation. Si $\omega < 1$, on parle de sous-relaxation, si $\omega = 1$, on retrouve la méthode de Gauss-Seidel et si $\omega > 1$, on parle de sur-relaxation.*

Théorème 1.2.3 *La méthode de relaxation converge si et seulement si $\rho(B_R(\omega)) < 1$.*

1.2.5 Résultats de convergence dans des cas particuliers

On s'intéresse tout d'abord au cas des matrices symétriques définies positives.

Théorème 1.2.4 *Soit A une matrice symétrique définie positive et écrivons $A = M - N$ avec M inversible et $M^{-1}N$ définie positive. Alors la méthode itérative*

$$x^{(0)} \in \mathbb{K}^n, \quad x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b,$$

converge.

Corollary 1.2.1 *Soit A une matrice symétrique définie positive. Alors la méthode de Gauss-Seidel converge.*

Définition 1.2.4 *Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est dite à diagonale strictement dominante si:*

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|.$$

Théorème 1.2.5 *Soit A une matrice à diagonale strictement dominante. Alors A est inversible et les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent toutes les deux.*

Exercice 1.2.1 *On considère la matrice A et le vecteur b définis par:*

$$A = \begin{pmatrix} 1,02 & -0,05 & -0,1 \\ -0,11 & 1,03 & -0,05 \\ -0,11 & -0,12 & 1,04 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,8 \\ 1,4 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que les processus itératifs de Jacobi et Gauss-Seidel associés au système linéaire $AX=b$ convergent

2. Calculer les trois (3) premiers itérés de la méthode de Jacobi du système $Ax = b$ en

partant de $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1,4 \end{pmatrix}$, et estimer l'erreur.

3. Pour $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1,4 \end{pmatrix}$, quel est le nombre suffisant d'itérations pour que la méthode de Gauss-Seidel donne une solution approchée du système précédent avec une précision de 10^{-4} .