Université de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de mathematiques

2020/2021
$2^{ème}$ année Master
Semestre 03

Série d'exercices N°2

Exercice 0.1.
Montrer que la symétrie est une propriété tensorielle, c'est-à-dire que si un tenseur $\overline{\overline{T}}$ est symétrique ($T_{ij} = T_{ji}$) dans une base orthonormé $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, alors cette propriété est également vraie dans toute autre base orthonormée $B' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$.

Exercice 0.2. Montrer que l'antisymétrie est également une propriété tensorielle.

Exercice 0.3. Montrer qu'un tenseur $\overline{\overline{T}}$ quelconque peut toujours se décomposer en une partie symétrique et une partie antisymétrique.

Exercice 0.4. Soit $\overline{\overline{S}}$ un tenseur symétrique et $\overline{\overline{A}}$ un tenseur antisymétrique, montrer que l'on a toujours :

$$\overline{\overline{S}} : \overline{\overline{A}} = 0.$$

Exercice 0.5. Soit $\overline{\overline{S}}$ un tenseur symétrique et$\overline{\overline{T}}$ un tenseur quelconque, montrer que l'on a toujours: $\overline{\overline{S}}:\overline{\overline{T}}=\overline{\overline{S}}:\overline{\overline{T}}^S$, où $\overline{\overline{S}}^S$ est la partie symétrique de $\overline{\overline{T}}$

Exercice 0.6. Soit est un vecteur quelconque. Montrer que l'on a toujours:

$$div(r\vec{o}t\vec{U}) = 0.$$

Exercice 0.7. Soit f est un scalaire quelconque. Montrer que l'on a toujours:

$$r\vec{o}t(gr\vec{a}df) = 0.$$

Exercice 0.8. Dans un espace Euclidien E_3 muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère les deux fonctions scalaires $\phi = \phi(x_1, x_2, x_3)$ et $\psi = \psi(x_1, x_2, x_3)$. On note: $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$; $\nabla = \partial_i e_i$ et $(\cdot) et (:)$ les produits scalaire et vectoriel.

- Que représentent les quantités suivantes. Ecrire leurs expressions indicielles et explicites.

$$\bullet\ \Delta = \nabla \cdot \nabla, \qquad \bullet\ \nabla\phi \qquad \bullet\ \Delta\phi, \qquad \bullet\ \nabla \wedge (\nabla\phi).$$

- Simplifier l'expression suivante en utilisant uniquement l'écriture indicielle:$(\partial_i e_i)(\partial_j e_j)$
- Montrer avec l'écriture indicielle que:

$$\partial_j e_j(\psi \partial_i e_i \phi) = \nabla\psi \cdot \nabla\phi = \phi\Delta\phi$$

Exercice 0.9. On considère deux tenseurs $\overline{\overline{T}}_1$ et $\overline{\overline{T}}_2$ d'ordre 2, montrer les relations suivantes :

- Que représentent les quantités suivantes. Ecrire leurs expressions indicielles et explicites.

$$\bullet\ (\overline{\overline{T}}_1 \overline{\overline{T}}_2)^T = \overline{\overline{T}}_2^T \overline{\overline{T}}_1^T, \qquad \bullet\ (\overline{\overline{T}}_1 \overline{\overline{T}}_2)^{-1} = \overline{\overline{T}}_2^{-1} \overline{\overline{T}}_1^{-1}, \qquad \bullet\ (\overline{\overline{T}}_1^{-1})^T = (\overline{\overline{T}}_1^T)^{-1}.$$

- Simplifier l'expression suivante:

$$[(\overline{\overline{T}}_1^{-1})^T \overline{\overline{T}}_2 \overline{\overline{T}}_1^{-1}]^{-1}$$