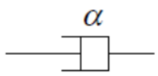
Chapitre 3 : Système linéaire libres amortis à un degré de liberté.

3.1 Force d'amortissement.

Un système soumis à un frottement est dit amorti. Le frottement le plus simple est le frottement *visqueux*. Les frottements visqueux sont de la forme

$$f=-\alpha v$$

Est une Constante positive appelé coefficient de frottement et v est la vitesse du corps en mouvement. En mécanique, l'amortissement est schématisé par :



La vitesse v est dans ce cas la vitesse relative des deux bras de l'amortissement.

3.2 Equation de Lagrange des systèmes amortis

S'il existe un frottement $f=-\alpha\dot{q}$, l'équation de Lagrange devient :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)=-\alpha\dot{q} \quad .$$

En introduisant la fonction de dissipation $D=\frac{1}{2}\alpha\dot{q}^2$, nous pouvons écrire :

$f=-\alpha\dot{q}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$. (En translation $D=\frac{1}{2}\alpha v^2=\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$. En électricité $D=\frac{1}{2}Ri^2=\frac{1}{2}R\dot{q}^2$).

L'équation de Lagrange des systèmes amortis s'écrit alors (où q=x, y, z, q, θ…)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)=-\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$$

3.3 Equation du mouvement des systèmes amortis

L'équation du mouvement des systèmes linéaires amortis par $f=-\alpha\dot{q}$ est de la forme

- On définit l'oscillation amorti comme suit :

$$\ddot{q}(t)+2\delta\dot{q}(t)+\omega_0^2 q(t)=0$$

Où δ est un coefficient positif et est appelé facteur d'amortissement. ω_0 est la pulsation propre.

$\frac{\omega_0}{2\delta}=Q$ est appelé facteur de qualité.

3.4 Résolution de l'équation du mouvement

$$\ddot{q}(t)+2\delta\dot{q}(t)+\omega_0^2 q(t)=0$$

La résolution de cette équation se fait par le changement de variable $q(t)=Ae^{rt}\Rightarrow\dot{q}(t)=Are^{rt}\Rightarrow\ddot{q}(t)=Ar^2e^{rt}$, l'équation devient alors :

$$\ddot{q}(t)+2\delta\dot{q}(t)+\omega_0^2 q(t)=0$$
$$Ar^2e^{rt}+2\delta Are^{rt}+\omega_0^2Ae^{rt}=0$$
$$Ae^{rt}\left(r^2+2\delta r+\omega_0^2\right)=0$$

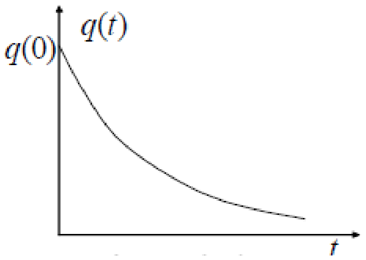
$$r^2+2\delta r+\omega_0^2=0$$

On calcule le discriminent Δ ’et on obtient alors :

$$\Delta=(2\delta)^2-4\omega_0^2$$
$$\Delta=4\delta^2-4\omega_0^2$$
$$\Delta=4\left(\delta^2-\omega_0^2\right)$$
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{4\left(\delta^2-\omega_0^2\right)}=2\sqrt{\left(\delta^2-\omega_0^2\right)}$$

Il existe trois types de solutions :

- ***Cas où le système est fortement amorti*** : $\Delta>0\Rightarrow\delta>\omega_0$ et $Q<0.5$



La solution de l’équation différentielle s’écrit comme suit :

$$q(t)=A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t}\ avec\ r_{1,2}=\frac{-2\delta\pm2\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}}{2}=-\delta\pm\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}$$
$$q(t)=A_1e^{\left(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\right)t}+A_2e^{\left(-\delta+\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\right)t}=e^{-\delta t}\left(A_1e^{\left(-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\right)t}+A_2e^{\left(\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\right)t}\right)$$

Où A_1 et A_2 sont coefficients à déterminer par les conditions initiales

$$\begin{cases}q(t=0)\\ \dot{q}(t=0)\end{cases}$$

On dit que le système a un mouvement apériodique.

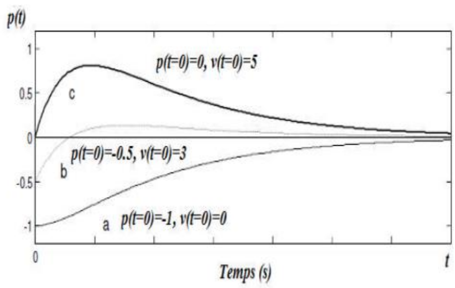
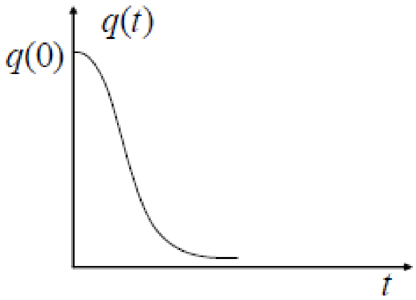


Figure 3.1 : Mouvement amorti apériodique

- **Cas où *l'amortissement est critique :*** $\Delta = 0 \Rightarrow \delta = \omega_0$ et Q = 0.5



La solution de l'équation est de la forme :

$$q(t) = (A_1 t + A_2) e^{rt}$$

$$r_1 = r_2 = r = \frac{-2\delta}{2} = -\delta$$

$$q(t) = (A_1 t + A_2) e^{-\delta t}$$

Où A_1 et A_2 sont coefficients à déterminer par les conditions initiales :

$$\begin{cases} q(t=0) \\ \dot{q}(t=0) \end{cases}$$

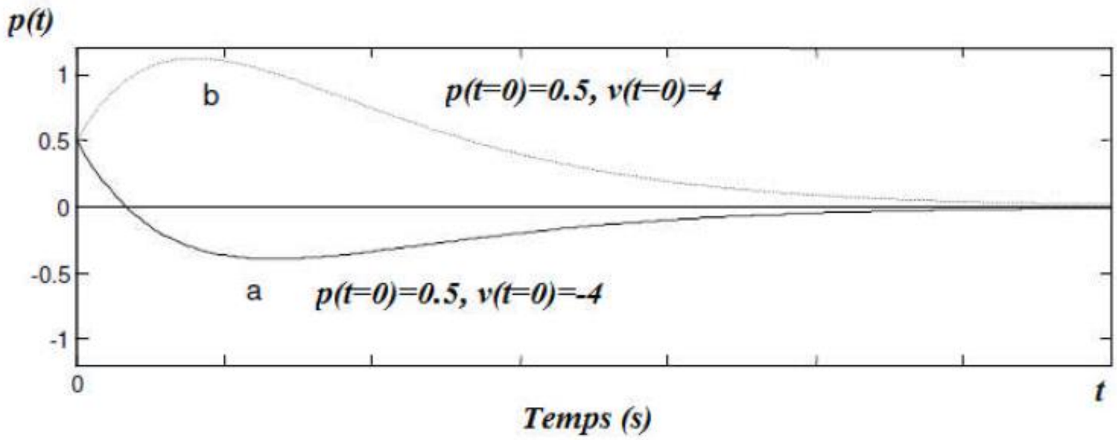
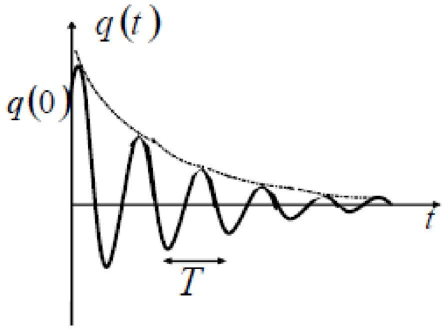


Figure 3.2 : Mouvement amorti critique

- **Cas où *l'amortissement est faible :*** $\Delta < 0 \Rightarrow \delta < \omega_0$ et Q > 0.5



Deux solutions complexes pour l'équation caractéristique

$$\begin{cases} r_1 = -\delta - j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \\ r_2 = -\delta + j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \end{cases}$$

Le mouvement résultant est $q(t) = A_1 e^{-r_1 t} + A_2 e^{-r_2 t}$ soit :

$$q(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

Où A et φ sont des constantes à déterminer par les conditions initiales : $\begin{cases} q(t=0) \\ \dot{q}(t=0) \end{cases}$

Le mouvement est dit pseudo- périodique. $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ est appelé pseudo- pulsation.

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$ est appelé pseudo période**.**

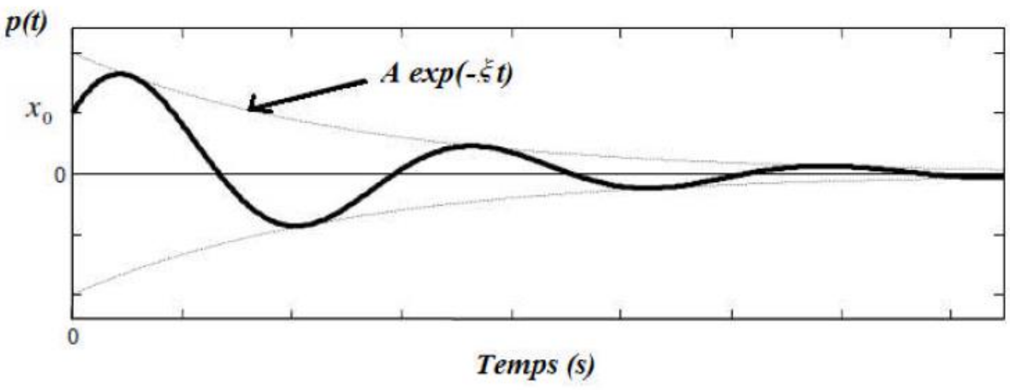


Figure 3.3 : Mouvement oscillatoire amorti

3.5 Décrément logarithmique

Pour évaluer la diminution exponentielle de l'amplitude du mouvement pseudo-périodique, nous utilisons le logarithme. Le rapport

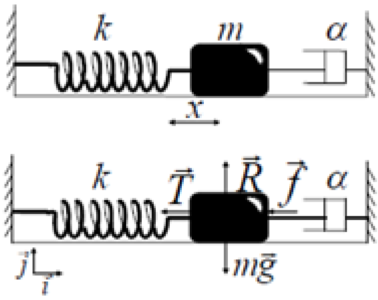
$D = Ln\dfrac{q(t)}{q(t+T)}$ Ou encore $D = \dfrac{1}{n}Ln\dfrac{q(t)}{q(t+nT)}$ est appelé le décrément logarithmique. En utilisant l'équation $q(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi)$, on trouve $\delta = Ln\dfrac{Ae^{-\delta t}}{Ae^{-\delta(t+T)}} \Rightarrow D = \delta T$

- ✓ Il faut signaler que le système subit **une perte d'énergie totale** due **au travail des forces de frottement.**

$$dE_T(t) = -\alpha\dot{p}(t)^2\,dt = -dW_{fr} \Rightarrow \Delta E_T + \Delta W_{fr} = 0$$

3.5.1 Exemples

a) Soit le système masse-ressort ci-contre. Trouver l'équation du mouvement d'abord avec le Lagrangien puis avec PFD.



Solution

• A l'aide du Lagrangien :

Le Lagrangien est :

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2.$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha v^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

L'équation de Lagrange s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$$

$$Avec\ L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + cte$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = \frac{1}{2}m\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(\dot{x}^2) = \frac{1}{2}m(2\dot{x}) = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\frac{d}{dt}(\dot{x}) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}kx^2\right) = -\frac{1}{2}k\frac{\partial}{\partial x}(x^2) = -\frac{1}{2}k(2x) = -kx$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha v^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 \Rightarrow \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2\right) = \frac{1}{2}\alpha\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(\dot{x}^2) = \frac{1}{2}\alpha(2\dot{x}) = \alpha\dot{x}$$

Alors

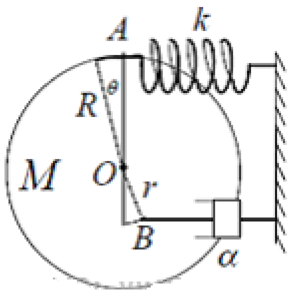
$$m\ddot{x}+kx=-\alpha\dot{x}\Rightarrow\begin{cases}\ddot{x}+\dfrac{k}{m}x+\dfrac{\alpha}{m}\dot{x}=0\\ \ddot{x}+\omega_0^2x+2\delta\dot{x}=0\end{cases}$$

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}\Rightarrow\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\ et\ 2\delta=\frac{\alpha}{m}\Rightarrow\delta=\frac{\alpha}{2m}$$

À l'aide du PFD : $\sum\vec{F}=m\,\vec{a}\Rightarrow m\vec{g}+\vec{T}+\vec{R}+\vec{f}=m\,\vec{a}\Rightarrow-kx\vec{i}-mg\vec{j}+R\vec{j}-\alpha\dot{x}\vec{i}=m\ddot{x}\vec{i}$

Par projection sur $x'Ox$: $-kx-\alpha\dot{x}=m\ddot{x}\Rightarrow m\ddot{x}+kx+\alpha\dot{x}=0\Rightarrow\ddot{x}+\dfrac{k}{m}x+\dfrac{\alpha}{m}\dot{x}=0$

b) Soit le système disque-ressort ci- contre. $\theta\ll1$. Trouver l'équation du mouvement si M=1kg, k=2 N/m, R=10cm, r=5cm, α=8Ns/m.



A l'aide du Lagrangien :

$$T=E_c=T\left[Disque\right]=\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

$$J=\frac{1}{2}MR^2$$

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$dU_k=-\vec{F}_k d\vec{l}=-F_k dl\cos\left(\vec{F}_k\left(\uparrow\right),d\vec{l}\left(\downarrow\right)\right)$$

$$dU_k=-F_k dl\cos\left(180°\right)$$

$$\cos\left(180°\right)=-1$$

$$dU_k=+F_k dl=kxdx\ /\ F_k=kx\,,dl=dx$$

$$U_k=\int dU_k=\int_0^{x_0+x}kxdx=k\int_0^{x_0+x}xdx=k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{x_0+x}=\frac{k}{2}\left[x^2\right]_0^{x_0+x}$$

$$U = U_k = \frac{k}{2}\left[\left(x_0 + x\right)^2 - 0\right]$$

$$U = \frac{k}{2}\left(x_0 + x\right)^2 = \frac{k}{2}\left(x^2 + 2xx_0 + x_0^2\right) = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0 + \frac{k}{2}x_0^2$$

$$U = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0 + \frac{k}{2}x_0^2 + cte \,/\, \frac{k}{2}x_0^2 = cte$$

Alors

$$U = U_k = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0 + cte$$

Avec

$$\sin\theta = \frac{x}{R} \Rightarrow x = R\sin\theta$$

$$U = U_k = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0 + cte = \frac{k}{2}\left(\mathrm{R}\sin\theta\right)^2 + k\left(\mathrm{R}\sin\theta\right)x_0 + cte$$

A faible amplitude $\sin\theta \approx \theta$

$$U = \frac{k}{2}R^2\left(\theta^2\right) + \left(kRx_0\right)\left(\theta\right) + cte$$

Equilibre

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{k}{2} \times R^2 \times 2\theta - \left(kRx_0\right)$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} : \theta = 0 \Rightarrow \frac{k}{2} \times R^2 \times 2\left(\theta = 0\right) - \left(kRx_0\right) = -\left(kRx_0\right)$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow -\left(kRx_0\right) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

Alors

$$U = \frac{k}{2}R^2\theta^2 + cte \,.$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha v^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

$$\dot{x} = r\dot{\theta} \Rightarrow D = \frac{1}{2}\alpha\left(r\dot{\theta}\right)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)=-\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$$

$$Avec\ L=T-U=U=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2-\frac{k}{2}R^2\theta^2+cte$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\dot{\theta}^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(2\dot{\theta}\right)=\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}\right)=\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\right)=\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=\frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{1}{2}kR^2\theta^2\right)=-\frac{1}{2}kR^2\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\theta^2\right)=-\frac{1}{2}kR^2\left(2\theta\right)=-kR^2\theta$$

$$D=\frac{1}{2}\alpha v^2=\frac{1}{2}\alpha r^2\dot{\theta}^2\Rightarrow \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}=\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}\alpha r^2\dot{\theta}^2\right)=\frac{1}{2}\alpha r^2\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\dot{\theta}^2\right)=\frac{1}{2}\alpha r^2\left(2\dot{\theta}\right)=\alpha r^2\dot{\theta}$$

Alors

$$\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\ddot{\theta}+kR^2\theta=-\alpha r^2\dot{\theta}\Rightarrow\begin{cases}\ddot{\theta}+\dfrac{kR^2}{\left(\frac{1}{2}MR^2\right)}\theta+\dfrac{\alpha r^2}{\left(\frac{1}{2}MR^2\right)}\dot{\theta}=0\\ \ddot{\theta}+\omega_0^2\theta+2\delta\dot{\theta}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ddot{\theta}+\dfrac{2k}{M}\theta+\dfrac{2\alpha r^2}{MR^2}\dot{\theta}=0\\ \ddot{\theta}+\omega_0^2\theta+2\delta\dot{\theta}=0\end{cases}$$

$$\omega_0^2=\frac{2k}{M}\Rightarrow \omega_0=\sqrt{\frac{2k}{M}}\ et\ 2\delta=\frac{2\alpha r^2}{MR^2}\Rightarrow \delta=\frac{\alpha r^2}{MR^2}$$