University of M'sila
Faculty of Technology
Department of Electrical Engineering

university year 2023/2024
field: ST
module: vibrations and waves

Tutorials (TD) Series №3
Damped oscillations of single-degree-of-freedom system

Exercise №1

Consider a mechanical oscillator $k+m+\alpha$. The instantaneous position $x(t)$ of the mass m is represented by the graph in fig.1.

1. What is the evolution regime of the oscillator? Give the differential equation involving the damping coefficient δ and the natural pulsation ω_0. Give the expression of $x(t)$.
2. Determine graphically the pseudo-period T_a.
3. Recall the definition of the logarithmic decrement D. Determine it graphically and then deduce the damping coefficient δ and the natural period T_0.

التمرين الأول

نعتبر الهزاز الميكانيكي $k+m+\alpha$. يمثل البيان في الشكل1 الموضع اللحظي $x(t)$ للكتلة m.

1. ما طبيعة الاهتزاز الذي يؤديه النظام؟ أعط المعادلة التفاضلية لهذا الاهتزاز بإدخال معامل التخامد δ والنبض الذاتي ω_0. أعط إذن عبارة $x(t)$.
2. حدد بيانيا قيمة شبه الدور T_a.
3. ذكر بتعريف التناقص اللوغرتمي D وجد قيمته بيانيا ثم استنتج معامل التخامد δ والدور الذاتي T_0.

Exercise №2

A body of mass $m=0.5kg$ resting on a horizontal plane and connected to a fixed frame by a horizontal spring of stiffness k=245N/m. Moved away by $X_0=3cm$ from its equilibrium position and then released without initial speed. The body perform damped free oscillations because of a solid friction, which its coefficient is $\mu=0.1(\tan\gamma=0.1)$.

1. Calculate the oscillation period T_0.
2. How many half-cycles does the body perform and at what distance from the equilibrium position does it stop?
3. What is the total distance traveled by the body? Deduce the resistant work of the friction force.
4. Compare the potential energies of the spring before and after these oscillations, conclusion?

التمرين الثاني

يستند جسم كتلته $m=0.5kg$ على مستو أفقي ويتصل بمسند ثابت بواسطة نابض ثابت مرونته $k=245N/m$
نزيح الجسم عن موضع توازنه بمقدار $X_0=3cm$ ثم نحرره دون سرعة ابتدائية، فيؤدي اهتزازات حرة متخامدة بفعل الاحتكاك الصلب الذي يتميز بمعامل $\mu=0.1$.

-1 أحسب دور الاهتزازات T_0.
-2 ما هو عدد أنصاف الدورات التي يؤديها الجسم وعلى أي بعد بالنسبة لموضع التوازن يتوقف الجسم؟
-3 ما هي المسافة الكلية التي يقطعها الجسم؟ استنتج العمل المقاوم لقوة الاحتكاك
-4 قارن بين الطاقة الكامنة للنابض قبل الاهتزاز وبعد التوقف. النتيجة؟

Exercise №3

Consider a series RLC electrical circuit. We give $C=10\mu F$ and $L=100mH$. The capacitor is initially charged. At time $t=0$, we close the RLC circuit and let it evolve freely. We set the resistance successively to the following three different values: $100\Omega, 150\Omega, 250\Omega$.

1. Determine in each case the operating regime (mode) of this oscillator. In which case(s) oscillations are observed? Then deduce in this(ese) case(s) the pseudo-period.
2. Which value should we give to R to observe the critical mode?

التمرين الثالث

نعتبر الدارة الكهربائية RLC على التسلسل. يعطى $L=100mH$ و $C=10\mu F$. *نقوم بشحن المكثفة ثم في اللحظة الزمنية* $t=0$ *نغلق الدارة* RLC *ونترك النظام يهتز بصفة حرة. نثبت المقاومة عند ثلاثة قيم مختلفة:* $100\Omega, 150\Omega, 250\Omega$ *على التوالي.*

1. حدد طبيعة الاهتزاز في النظام في كل حالة من الحالات الثلاث السابقة الذكر. ماهي الحالة (أو الحالات) التي نشاهد فيها اهتزازات في النظام؟ حدد إذن شبه الدور في هذه الحالة.
2. ما هي قيمة المقاومة R التي من أجلها يمكن أن نشاهد الحالة الحرجة؟

Exercise № 04

I - Undamped Free Regime

Consider a single-degree-of-freedom system as shown in Fig.2. The homogeneous disk of mass M and radius R can rotate around its fixed horizontal axis passing through its center. A rigid rod of length l and negligible mass; is attached to the disk, and carries a point mass m at its free end. A horizontally placed spring with a stiffness constant k; is connected to the disk; its other end is fixed as shown in Fig.2. The system is in static equilibrium when the rod is in its horizontal position. When in motion, the rod deviation from this position is measured by the angle $\theta(t)$. We consider small amplitude vibrations and assume that $\sin\theta \approx \theta$ *and* $\cos\theta \approx 1$.

1. Calculate the system total potential energy $U(\theta)$. Determine the spring deformation Δx at the equilibrium position. Simplify then the expression of $U(\theta)$.
2. Calculate the system kinetic energy $T(\dot\theta)$. $J_{disque} = \frac{1}{2}MR^2$
3. Write the Lagrange function of the system $\mathcal{L}(\theta,\dot\theta)$ and extract the differential equation governing the system motion and its natural frequency.

II - Damped Free Regime

Now, the system experiences viscous damping represented by a damper α distant by $b = \frac{3}{4}l$ from the origin of coordinates (Fig.2). Knowing that $m = \frac{M}{8}, k = \frac{2mgl}{R^2}$, $R = \frac{l}{2}$, show that the differential equation of motion can be written as:

$$\ddot\theta + 2\delta\dot\theta + \omega_0^2\theta = 0$$

Specify the expression of δ and ω_0^2.

التمرين الرابع

- الحركة الحرة غير المخمدة

نعتبر النظام ذو درجة واحدة من الحرية الممثل في الشكل2. يتألف من قرص متجانس (كتلتهM ونصف قطره R) يستطيع الدوران حول محور أفقي يمر بمركزه وساق صلبة مهملة الكتلة وطولها l وتحمل في نهايتها الطليقة كتلة نقطية m. النابض الذي ثابت مرونته k مثبت بالقرص بشكل أفقي ونهايته الأخرى مثبتة بمسند ثابت (الشكل2). في وضع التوازن السكوني تأخذ الساق الوضع الأفقي وأثناء الحركة نعين موضع الساق بالنسبة لموضع توازنها بالزاوية $\theta(t)$. نقبل من أجل السعات الصغيرة أن: $\cos\theta \approx 1$ و $\sin\theta \approx \theta$.

1- أحسب الطاقة الكامنة$U(\theta)$ للنظام وأحسب استطالة النابض Δx عند التوازن السكوني. بسط إذن عبارة $U(\theta)$

2- أحسب الطاقة الحركية $T(\theta)$ للنظام. يعطى $J_{disque} = \frac{1}{2}MR^2$.

3- أكتب دالة لاغرونج $\mathcal{L}(\theta,\dot\theta)$ للنظام ثم اشتق المعادلة التفاضلية للحركة ونبضها الذاتي.

II- الحركة الحرة المخمدة:

نعتبر الآن أن النظام يتلقى احتكاكا لزوجيا ممثلا بشكل مخمد معامل تخامده الخطي α ومثبتا كما هو مبين في الشكل2

علما أن $R = \frac{l}{2}$ و $k = \frac{2mgl}{R^2}$ و $m = \frac{M}{8}$ وأن المخمد يبعد عن مبدأ الإحداثيات بمقدار $b = \frac{3}{4}l$ فبين أن المعادلة التفاضلية من الشكل:

$\ddot\theta + 2\delta\dot\theta + \omega_0^2\theta = 0$ مع تحديد عبارة كل منδ و ω_0^2.

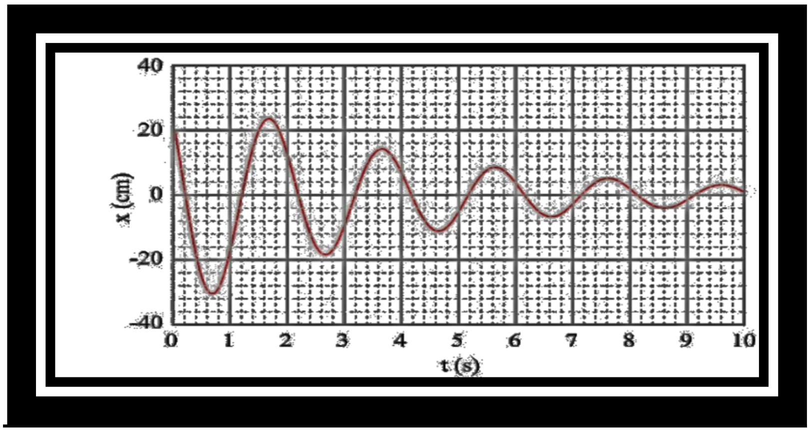

fig.1

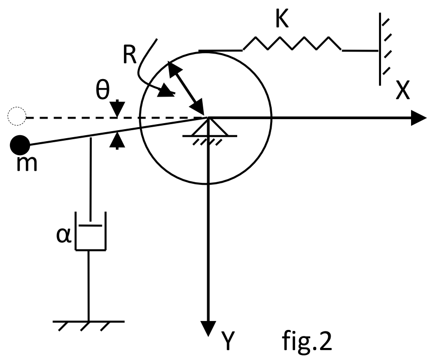

fig.2