Chapitre IV

Stabilité, Stabilité selon Lyapunov

IV.1. INTRODUCTION

La plupart des systèmes physiques (procédés) qui nous entourent sont non linéaires. Bien souvent, ces non linéarités sont faibles ou ne sont pas visibles sur la plage d'opérations de ces procédés. Le souci constant d'améliorer les performances des systèmes commandés conduit à des modélisations de plus en plus précises qui permettent de répondre sur une plus large plage d'opérations. C'est à ce moment que les non linéarités se font sentir et rendent les outils d'analyse et/ou de synthèse des lois de commande, utilisés dans le domaine linéaire, caduques et absolument incapables de rendre compte de certains phénomènes. C'est pourquoi, depuis quelques années, beaucoup de recherche ont été effectuées dans le domaine de la commande des systèmes non linéaires. La majorité de ces approches consiste à trouver une fonction de Lyapunov qui permet de déduire une loi de commande pour le système tout en assurant la stabilité globale de la commande.

Ce chapitre présent, dans un premier temps, une brève introduction sur les notions théoriques de stabilité des systèmes non linéaires et du vocabulaire qu'il comporte et, dans un deuxième temps, il introduit des notions de base de stabilité selon la théorie de Lyapunov [9].

IV.2. NOTIONS DE BASES

La notion de stabilité caractérise le domaine dans le quel se trouve les signaux du système. Elle est la chose la plus importante à déterminer elle peut être par plusieurs critère : Routh, Nyquiste…

La méthode de Lyapunov est une méthode plus générale (appliquée aux systèmes linéaires et non linéaires). Cette section présente quelques notions de bases nécessaires à la compréhension des subtilités de la théorie de Lyapunov.

IV.2.1 Systèmes non linéaires

De façon générale, les systèmes physiques représentés par des équations différentielles linéaires à coefficients constants sont appelés systèmes linéaires. L'hypothèse de linéarité équivaut au principe de superposition. Les systèmes non linéaires, par opposition aux systèmes linéaires, sont des systèmes physiques qui ne sont pas régis par des équations linéaires. Autrement dit, le principe de superposition ne peut pas leur être appliqué.

Les systèmes non linéaires peuvent être le lieu de plusieurs phénomènes. Par exemple, ils peuvent converger, en régime permanent, à différents points d'équilibres, contrairement aux systèmes linéaires, qui n'en possèdent qu'un seul. Cependant, bien d'autres phénomènes caractérisent les systèmes non linéaires [7]. Quelques différences vont être introduites dans les sous sections suivantes.

IV.2.2 Equilibre

Physiquement, un système est en équilibre lorsqu'il conserve son état en absence de forces externes. Mathématiquement, cela équivaut à dire que la dérivée $\dot{x}$ de son vecteur d'état est nulle. Pour un système :

$$\dot{x} = \text{¨}(x) \qquad \text{(IV.1)}$$

L'état (ou les états) d'équilibre x_e, est la solution (sont les solutions) de l'équation algébrique $\text{¨}(x) = 0$

Pour les systèmes linéaires, dors $\text{¨}(x) = A \cdot x$, ce qui implique que $x = 0$ est un point d'équilibre pour tous les systèmes linéaires. Deux cas différents peuvent survenir, soit A est régulière, alors que l'origine est le seul point d'équilibre. Si A est singulière, ce qui défini un sous-espace où $x \cdot A = 0$ alors il existe une région d'équilibre. Pour les systèmes non linéaires, la solution n'est pas aussi évidente et l'équilibre ne se trouve pas toujours à l'origine. Les régions d'équilibres peuvent être constituées de domaines continus ou de points isolés et/ou la combinaison des deux.

IV.2.3 Plan de phase

Pour bien comprendre le comportement d'un système non linéaire, on a recouru à une représentation des ses trajectoires dans l'espace de phase comme montre la figure (III.1). Ces trajectoires sont un ensemble de courbes qui représentent l'évolution de l'état du système dans le temps. Cette représentation doit toutefois passer par la résolution de l'équation différentielle (III.1), ce qui n'est pas toujours facile. Cependant, les techniques basées sur la deuxième méthode de Lyapunov contournent ce problème. Cette méthode sera montrée dans ce chapitre.

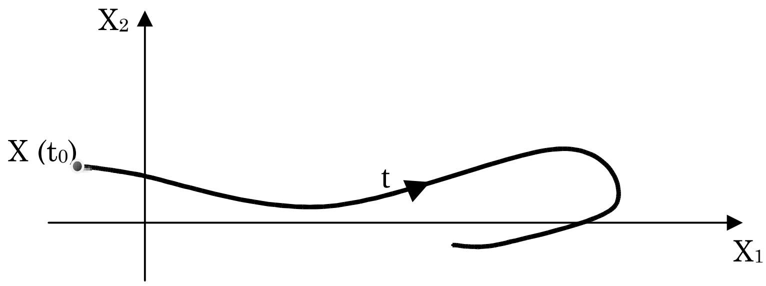

Figure IV.1 Trajectoire d'un système dans le plan de phase.

IV.3. STABILITE (SELON LYAPUNOV)

De façon générale, on dit qu'un système est stable s'il, déplace de sa position d'équilibre, il tend à y revenir ; instable, s'il tend à s'en écarter davantage. Lyapunov fournit une explication un peu plus mathématique de la stabilité [44].

Prenons comme exemple un système dont l'état est défini par le vecteur x qui possède la position d'équilibre x_e. Écarté de sa position d'équilibre et abandonné à lui-même au temps $t = t_0$ avec les conditions initiales $x(t_0)$, le système aura comme état $x(t)$. La position d'équilibre du système est stable voir Figure (IV.2) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\| x(t_0) - x_e \|^2 < \delta \tag{IV.2}$$

et qu'après un certain temps *t*, et pour toutes les valeurs $t > t_0$, la relation suivante est vérifiée :

$$\| x(t) - x_e \|^2 < \varepsilon \tag{IV.3}$$

Dans le cas contraire l'équilibre est instable. Il n'est pas nécessaire que l'état $x(t)$ tende vers x_e, lorsque t augmente indéfiniment, pour que le système soit stable. Si l'état tend effectivement vers x_e, le système est *asymptotiquement stable*. Dans le cas où les états n'atteignent pas x_e, mais qu'ils restent à l'intérieur d'un certain ε, alors le système à une *stabilité simple* (Figure(IV.2)).

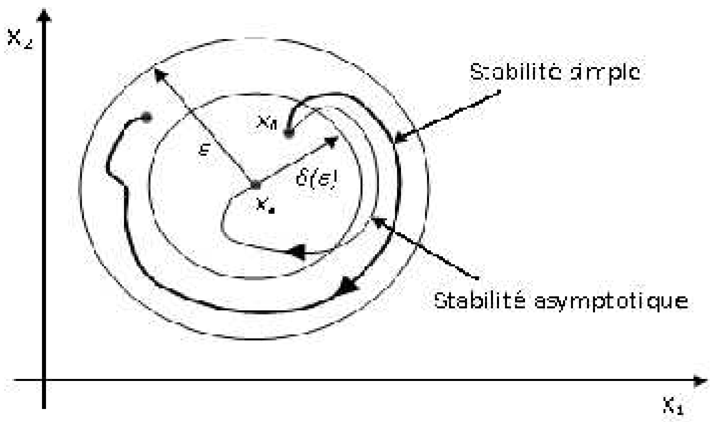

Figure IV.2 Types de stabilité selon Lyapunov dans le domaine roulière.

IV.4. STABILITE LOCALE ET STABILITE GLOBALE

On peut prédire le comportement d'un système linéaire à partir de l'analyse de sa position d'équilibre. Un système dont le point d'équilibre est stable (instable) est stable (instable). Il n'en est plus de même pour un système non linéaire.

Étant donné que celui-ci peut avoir plusieurs positions d'équilibre, la stabilité de l'une de ces positions d'équilibre ne suffit pas à elle seule à prédire la stabilité du système. Afin de quantifier l'influence de la stabilité d'un point d'équilibre sur la stabilité du système, de nouvelles définitions de la stabilité sont introduites ; on parle de stabilité locale, stabilité globale et région d'attraction.

IV.4.1 Stabilité locale

La stabilité locale concerne simplement la position d'équilibre considérée, sans rien préjuger sur le domaine de validité de cette stabilité. C'est une condition nécessaire, mais non suffisante à la stabilité du système dans un certain domaine D, contenant cette position d'équilibre.

IV.4.2 Stabilité globale

On parle de stabilité globale lorsque le système est stable pour toutes les valeurs que peuvent prendre les variables du système. La stabilité globale possède un intérêt pratique beaucoup plus considérable que la stabilité locale. Elle ne dépend pas seulement du système, mais aussi des valeurs que peuvent prendre les variables dans le problème considéré. Ainsi, le même système est stable ou instable globalement: suivant le domaine de variables auquel on s'intéresse.

IV.4.3 Région d’attraction

La région autour de la position d'équilibre, à l'intérieur de laquelle toutes les trajectoires approchent le point d'équilibre est appelée région ou domaine d'attraction. Sa taille est souvent un facteur très important dans l'évaluation des performances des systèmes non linéaires.

IV.5 METHODES DE LYAPUNOV

Les faibles non-linéarités dans un système à commander sont, la plupart du temps, traitées comme des perturbations affectant un modèle linéaire du système. Toutes les théories, qui ont été développées depuis plusieurs années et qui sont bien connues des systèmes linéaires sont utilisées. Malheureusement, ces non-linéarités ne peuvent pas toujours être mises de côté et il faut alors utiliser d'autres méthodes [2].

Il y a deux approches possibles pour la commande d'un système non linéaire. La première vise à linéariser le système à commander, afin de profiter des techniques des modèles linéaires. Cette linéarisation est réalisée, moyennant des approximations ou des transformations géométriques dans l'espace de phase. Le système linéarisé est ensuite traité avec la théorie des systèmes linéaires.

La deuxième approche consiste à trouver une Fonction de Commande de Lyapunov (fcl) garantissant certaines performances pour le système en boucle fermée. De telles fonctions peuvent être très difficiles à trouver pour un système non linéaire d'ordre élevé. C'est là qu'entre en jeu la technique du backstepping qui permet de réduire cette complexité.

Toutefois, avant d'introduire le backstepping, les deux méthodes d'analyse des systèmes non linéaires, fournies par Lyapunov, vont être brièvement décrites. Une attention particulière sera portée sur la deuxième méthode de Lyapunov qui fourni un outil très puissant pour tester et trouver des conditions suffisantes à la stabilité des systèmes dynamiques, sans avoir à résoudre explicitement les équations différentielles les décrivant [11].

IV.5.1 Première méthode de Lyapunov

Le théorème de *stabilité locale* de Lyapunov, connu sous le nom de première méthode, permet de se prononcer sur la linéarisation d'une dynamique autour d'un point d'équilibre. Cette méthode apporte une validité théorique à la technique de linéarisation. Elle mentionne que si le système linéarisé est asymptotiquement stable, alors i1 y a stabilité asymptotique. Dans le cas où le système linéarisé est instable, il y a instabilité. Par contre si celui-ci est stable sans pour autant l'être asymptotiquement, alors il est impossible de se prononcer sur la stabilité.

Ce théorème est d'une importance limitée, car il ne permet d'étudier que la stabilité d'un point singulier (stabilité locale) et ne donne aucune information sur le domaine de stabilité (stabilité globale). De plus, dû aux approximations du premier degré (linéarisation), il n'est pas possible de tenir compte de tous les types de phénomènes non-linéaires (organe avec zone morte, ...) [12].

IV.5.2 Deuxième méthode de Lyapunov

Cette méthode est basée sur le concept d'énergie dans un système. Pour un système physique, l'énergie est une fonction définie positive de son état. Dans un système conservatif, l'énergie reste constante; pour un système dissipatif, elle décroît. Pour ces deux cas, le système est stable. Si l'énergie croît, le système est instable [2].

L'idée de cette méthode est d'analyser la stabilité du système, sans avoir à résoudre explicitement les équations différentielles non linéaires le régissant. Il suffit simplement d'étudier les variations (signe de la dérivée) de l'énergie (ou une fonction qui lui est équivalente) le long de la trajectoire du système (figures 3.3). Les théorèmes suivants, qui permettent de se prononcer sur la stabilité (ou instabilité) d'un système, sont fournis par Lyapunov (1966) [12].

Théorème (Stabilité simple)

- S'il est possible de trouver une fonction V de signe défini dans un domaine D et dont la dérivée totale $\dot{V}$ soit semi-définie et de signe opposé dans le même domaine, l'équilibre est (simplement) stable dans ce domaine (c'est-à-dire stable non asymptotiquement, voir figure (IV.2)).

- Stabilité selon la figure (IV.3)

$$\forall x_1 \in I_1 \Rightarrow \exists\ I_2(I_1) : x(t) \leq I_2 \qquad \text{(IV.4)}$$

- Un système est L stable (stable au sens de Lyapunov) si-s-si tout les signaux appliquées sur le système ne sort pas du domaine roulière du système figure (III.2). D'un point de vue mathématique Lyapunov à montionner la notion de stabilité :

Considérons $R > 0 \quad \exists\, r > 0$ telque si $\|x(0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| < r\ \forall t > 0$ (IV.5)

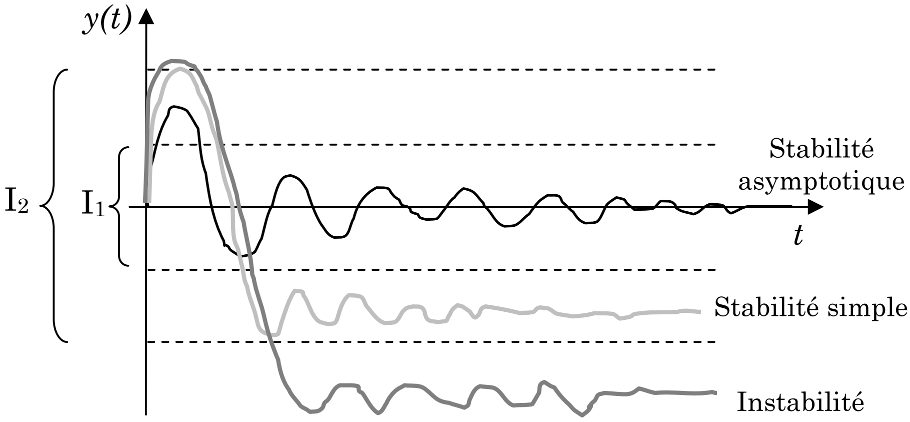

Figure IV.3 Types de stabilité selon Lyapunov.

Théorème (Stabilité asymptotique)

- S'il est possible de trouver une fonction $V(x)$ de signe défini (avec $V(0) = 0$), dans un domaine D comprenant la position d'équilibre et dont la dérivée totale par rapport au temps $\dot{V}$ soit définie et de signe opposé dans le même domaine, l'équilibre sera asymptotiquement stable dans ce domaine.
- Dans le domaine roulière un système est asymptotiquement stable si-s-si :

Il est L stable et plus de ça $\lim_{t\to+\infty} \|x(t)\| = 0$

Théorème (Instabilité)

S'il est possible de trouver une fonction Vdont la dérivée est de signe défini dans un domaine D comprenant l'origine et que V soit définie de même signe que $\dot{V}$**,** ou indéfinie en signe, l'équilibre est instable.

Contrairement à la première méthode, la deuxième méthode donne plus d'information au niveau de la stabilité. Elle a l'avantage de ne pas se limiter à la prédiction des points d'équilibre, mais bien d'une région d'attraction au tour de ces points d'équilibre [2].

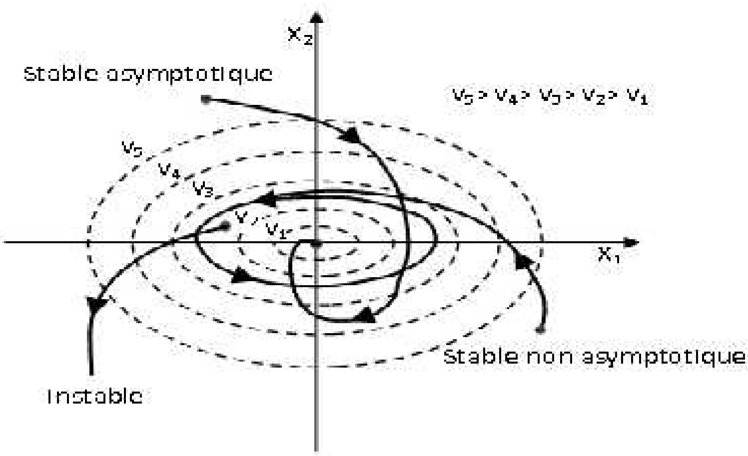

Figure IV.4 Contours a énergie constante dans le plan de phase.

Ces théorèmes présentent une condition suffisante à la stabilité. Pour l'étude de la stabilité d'un système caractérisé par un vecteur d'état x, la méthode directe de Lyapunov consiste, alors à chercher une fonction $V(x)$ (représentative de l'énergie) de signe défini qui se prête à l'application de l'un des théorèmes cités précédemment (Figure IV.4). Il n'y a aucune méthode qui permet de trouver directement une fonction de Lyapunov pour un système donné. Néanmoins, il existe des approches qui conduisent, en général, à des résultats acceptables [11]. Voici quelques exemples de fonction de Lyapunov :

IV.6. FORME QUADRATIQUE

La définition positive de la forme quadratique $V(x)$ peut être déterminée par le critère de *Sylvester* qui annonce que $V(x)$ est définie positive si P est définie positive.

$$V(x) = x^T \cdot P \cdot x \tag{IV.6}$$

Avec : $x^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$; $\quad x^T = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$; $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Où P est une matrice réelle symétrique.

Exemple 1

$V(x) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3$

Pour déterminer le type de définition de V il faut la mètre sous la forme $V(x) = x^T \cdot P \cdot x$

$$V(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{p} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

P est définie positive $\Rightarrow$ $V(x)$ est DP

IV.6.1. Deuxième méthode de Lyapunov

Soit le système linéaire $\dot{x} = Ax$ et soit la fonction d'énergie $V(x) = x^T \cdot P \cdot x$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T \cdot P \cdot x + x^T \cdot P \cdot \dot{x} \\ &= (Ax)^T \cdot P \cdot x + x^T \cdot P \cdot Ax \\ &= x^T A^T \cdot P \cdot x + x^T \cdot P \cdot Ax \Rightarrow \dot{V}(x) = x^T (A^T P + PA) x \end{aligned} \tag{IV.7}$$

Le système est stable si $\dot{V}(x) < 0$ c.-à-d. $(A^T P + PA)$ est définie négative
Si on pose $A^T P + PA = -Q$ avec Q représente une matrice définie positive, dans ce cas :

$$\dot{V}(x) = -x^T \cdot Q \cdot x \tag{IV.8}$$

Pour la détermination de stabilité en fixe Q (définie positive) et en calcule la matrice symétrique P. Si P est DP $\Rightarrow$ le système est stable.

Exemple 2

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Etudier la stabilité par la méthode de Lyapunov.

Système stable $\Rightarrow \dot{V}(x) < 0 \Rightarrow (A^T P + PA) = -Q$. Dans ce cas si Q est DP il faut trouver P DP

Choix Q DP $\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $|1| > 0$ et $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$

$$A^T P + PA = -Q$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Après développement en trouve :

$$P = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |3/2| > 0 \, , \begin{vmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

P est DP $\Rightarrow$ le système stable.

IV.6.2. Fonction quadratique plus intégrale

$$V(x) = x^T \cdot P \cdot x + \int_0^i \ddot{} \, (u) \, du \qquad \text{(IV.9)}$$

Avec $\ddot{}$ assujettie à certaines contraintes.

Cependant, des inconvénients et des limites existent toujours : L'élaboration d'une fonction de Lyapunov impose un modèle mathématique simplifié et peu réaliste. Les résultats des méthodes directes sont conservatifs : on ne peut rien affirmer quant à la stabilité en dehors du domaine estimé [10, 13].

IV.7. DEFINITION POSITIVE DES FONCTIONS SCALAIRES

On peut dire que la fonction scalaire $V(x)$:

- Définit positive si $V(0) = 0$ et $V(x) > 0, x \neq 0$
- Semi définit positive si $V(0) = 0$ et $V(x) \geq 0, x \neq 0$
- Définit négative si $-V(x)$ définit positive.
- Semi définit négative si $-V(x)$ Semi définit positive.
- Sans borne radiale si $V(x) \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$

Maintenon on peut évoluer le nouveau théorème de stabilité [52].

Théorème (Lasalle-Yoshizawa)

On Considère le système

$$\dot{x} = f(x(t)) \qquad \text{(IV.10)}$$

Soit $x_e = 0$ point d'équilibre du système (IV.10), et soit $V(x)$ une fonction scalaire différentielle contenu sachons que :

* $V(x)$ Définit positive.

* $V(x)$ Sans borne radiale.

* $\dot{V}(x) = V_x(x) f(x) \leq -W(x)$ Avec $W(x)$ Semi définit positive

Toute solution de (IV.10) satisfait :

$$\lim_{t \to \infty} W(x(t)) = 0 \qquad \text{(IV.11)}$$

Si $W(x)$ Définit positive (DP) alors le point d'équilibre $x_e = 0$ possède une stabilité asymptotique globale.

Exemple 3

* $V(x) = x_1^2 + 2x_2^2$ $\qquad \begin{cases} V > 0 \\ V(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow DP$

* $V(x) = (x_1 + x_2)^2$ $\qquad \begin{cases} V \geq 0 \\ V(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow SDP$

* $V(x) = -x_3^2 - (3x_1 + 2x_2)^2$ $\qquad \begin{cases} V < 0 \\ V(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow DN$

* $V(x) = x_1 x_2 + x_2^2$ $\qquad V$ Indefinie

Exemple 4

On considère le système :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_1^3 \end{aligned}$$

Si on choisir $V(x) = \sim \cdot x_1^4 + x_2^2$ on obtient :

$$\dot{V}(x) = (4\sim - 2) \cdot x_1^3 x_2 - 2x_2^2$$

Le choix de $\sim = 1/2$ nous donne la nouvelle expression de $\dot{V}$ avec $\dot{V}(x) = -2x_2^2 \leq 0$ évidemment on ne peut pas utilise le théorème **(**IV.6) comme il est par ce que $\dot{V}$ est Semi définit négative.

IV.8. FONCTION DE COMMANDE DE LYAPUNOV (fcl)

Maintenant on ajoute la commande u et on considère le nouveau système :

$$\dot{x} = f(x, u) \qquad \text{(IV.12)}$$

Notre objectif est de trouver une loi de commande $u = \sim(x)$ telle que l'équilibre ($x_e = 0$) de l'état désire du système en boucle fermée.

$$\dot{x} = f(x, \sim(x)) \qquad \text{(IV.13)}$$

Soit asymptotiquement stable. Pour cela un bon choix des fonctions $V(x)$ et $W(x)$ est nécessaire. Avec $W(x)$ une fonction définit positive.

Nous avons besoin de trouver la commande $\sim(x)$ pour garantir que pour tous $x \in \Re^n$

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dx} f(x, \sim(x)) \leq -W(x) \tag{IV.14}$$

On doit choisir le paire $V(x)$ et $W(x)$ soigneusement pour garantir la stabilisation du système (IV.12) et vérifier la condition (IV.14).

IV.8.1 Définition

Une fonction $V : \Re^n \rightarrow \Re_+$ définie positive et sans borne radiale est appelée une fonction de commande de Lyapunov (fcl) pour le système (IV.12) si pour tous $x \neq 0$

$$\dot{V}(x) = V_x(x) f(x,u) < 0 \text{ Pour certaines commandes } u \tag{IV.15}$$

La signification de cette définition est en effet l'existence de loi de commande globalement stabilisante est équivalent à l'existence de fcl. Si on à une fcl d'un système on peut certainement trouver une loi de commande globalement stabilisante. L'inverse et aussi vrai [14].

IV.8.2 Application au design

Soit à stabiliser l'origine ($x_1 = 0$) du système scalaire :

$$\dot{x}_1 = \ddot{\ }_1(x_1)^T \mathrm{g} + \cdot_1(x_1) u \tag{IV.16}$$

Ou $\ddot{\ }_1$ et $\cdot_1$ sont des fonctions non linéaires, g est un vecteur de paramètres connus. Pour ce faire, une fcl $V(x_1)$ doit être choisie et une commande u qui annule sa dérivée le long de la trajectoire, doit être calculée. Pour un système scalaire,

$$V(x_1) = \frac{1}{2} x_1^2 \tag{IV.16}$$

représente souvent un bon choix [7, 15]. Sa dérivée le long de la solution de (IV.16) donne :

$$\dot{V}(x_1) = x_1 . \dot{x}_1 = x_1 . \left(\ddot{\ }_1(x_1)^T \mathrm{g} + \cdot_1(x_1) u \right) \tag{IV.17}$$

Un choix judicieux de u rend $\dot{V}(x_1)$ négative et assure la stabilité asymptotique de l'origine du système. Un exemple de commande est donné par le choix de u tel que :

$$\ddot{\ }_1(x_1)^T \mathrm{g} + \cdot_1(x_1) u = -k_1 x_1 \quad , \quad k_1 > 0 \tag{IV.18}$$

Ce qui donne :

$$u = \frac{1}{\cdot_{1}(x_1)}(\ddot{}_{1}(x_1)^T \mathsf{g} - k_1 x_1) \tag{IV.19}$$

La dérivée s'écrit alors:

$$\dot{V}(x_1) = -k_1 x_1^2 \leq 0 \tag{IV.20}$$

D'où la stabilité asymptotique de l'origine. Le fait que, dans (IV.20), V soit semi-définie négative n'implique pas forcément une stabilité simple. L'ensemble des points où la dérivée s'annule ne constitue pas une trajectoire possible du système, puisqu'elle ne s'annule qu'à l'origine. On peut donc, selon le théorème de Barbašin et Krasovskij [16], affirmer la stabilité asymptotique.

Remarque (Choix de la commande)

Le choix de u n'est pas unique. Un bon choix permet de rendre négative la dérivée, sans supprimer les non-linéarités utiles dans le système, ni augmenter inutilement l'effort fourni par l'actionneur.

Exemple

Soit à stabiliser l'origine ($x_1 = 0$) du système scalaire :

$$\dot{x}_1 = 5x_1^2 - x_1^3 + u$$

Il s'agit de formuler une fcl $V(x) > 0$ pour le variable d'état du système, et de choisir la loi de commande u qui fera décroître cette fonction. En définissant la fonction de Lyapunov par :

$$V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$$

Pour que la fonction de lyapunov décroisse, il suffit d'assurer que sa dérivée est négative. Ceci est vérifie si :

$$\dot{V}(x_1) = x_1.\dot{x}_1 = x_1.(5x_1^2 - x_1^3 + u) \leq 0$$

Un choix judicieux de u rend $\dot{V}(x_1)$ négative et assure la stabilité asymptotique de l'origine du système.

$$5x_1^2 - x_1^3 + u = -k_1 x_1 \quad , \quad k_1 > 0$$

Par exemple on choisir u comme :

$$u = -k_1 x_1 - 5x_1^2 + x_1^3$$

La dériver prend la forme suivante :

$$\dot{V}(x_1) = -k_1 x_1^2 \leq 0$$

D'où la stabilité asymptotique de l'origine est assurée.

IV.8.3 Choix de la fonction de Lyapunov

Même pour des systèmes simples et en l'absence d'incertitudes, le choix de la fonction de Lyapunov, et de la loi de commande (qui en dépend directement), n'est pas toujours facile. Aucune règle générale n'existe quant au choix d'une telle fonction. Et quand on sait l'influence de ce choix sur le comportement général du système, on comprend l'intérêt qu'a suscité ce problème ces dernières années. Un bon choix de la fonction de Lyapunov permet d'assurer une stabilité dans une large plage de fonctionnement, voire même globale. Différentes approches ont été présentées dans [16], concernant la construction des fonctions de Lyapunov dans le cadre de l'analyse des systèmes simples.

IV.9. CONCLUSION

Ce chapitre présent, dans un premier temps, une brève introduction sur les notions théoriques de stabilité des systèmes non linéaires et du vocabulaire qu'il comporte et, dans un deuxième temps, il introduit des notions de base de stabilité selon la théorie de Lyapunov.

Dans ce chapitre on à définit le concept fcl qui est un outil principal pour la conception des commandes non linéaires. Beaucoup de recherche ont été effectuées dans le domaine de la commande des systèmes non linéaires. Le backstepping qui fait l’objet de chapitre suivant fait partie de ces nouvelles méthodes de commande. Cette approche consiste à trouver une fonction de Lyapunov qui permet de déduire une loi de commande pour le système tout en assurant la stabilité globale de commande.