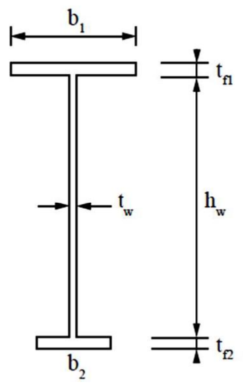
Série- I- Caractéristiques géométriques des sections

Exercice 01:

<u>Aire d'une section</u>

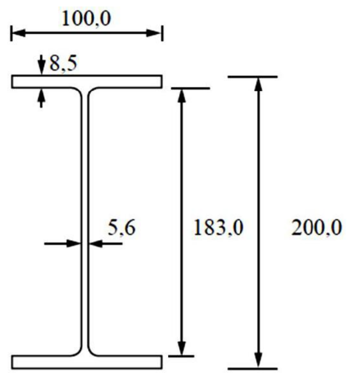
L’aire de la section droite d’une barre est la somme de ses aires élémentaires. L’aire de la section est exprimée en mm^2, cm^2, . . .

Soit la section particulière telle que le I présenté à la figure 1



Trouver la section totale:

AN:



Exercice 02:

2. MOMENT STATIQUE

Le moment statique S d’une section par rapport à un axe est égal au produit de l’aire de la section par la distance entre son centre de gravité G et l’axe.

$$S_{aa'} = Ad$$

Exercice 03:

3. CENTRE DE GRAVITÉ

Le centre de gravité G d'une section est le point tel que le moment statique de la section par rapport à n'importe quel axe passant par ce point est nul.

Exercice 04:

4. MODULE DE RÉSISTANCE PLASTIQUE DES SECTIONS SYMÉTRIQUES

Le module de résistance plastique W_{pl} par rapport à l'axe de symétrie d'une section est égal à la somme des valeurs absolues des moments statiques des aires situées de part et d'autre de cet axe.

Le module de résistance plastique d'une section symétrique vaut donc deux fois le moment statique de la demi-section située d'un côté de l'axe: $W_{pl} = 2\ S$.

Les modules de résistance plastique sont exprimés en mm^3, cm^3,...

Exercice 05

5. MOMENT D'INERTIE

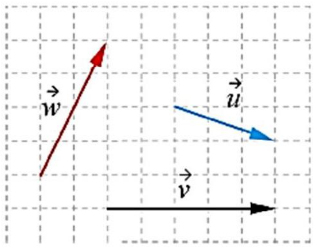
Le moment d'inertie (ou inertie) d'une **surface infiniment petite** par rapport à un axe éloigné de cette surface est égal au produit de son aire par le carré de la distance à l'axe (• *figure 12*). Il est toujours positif et s'exprime en mm^4, cm^4,

Série- II- Calcul vectoriel

Exercice 1

Utilisez les vecteurs de la figure ci-dessous pour calculer sur une feuille quadrillée, les vecteurs suivants : $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j}$ $\quad \vec{v} = 5\vec{i}$ $\quad \vec{w} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$

a. $\vec{v}+\vec{w}$
b. $\vec{u}+\vec{v}$
c. $3\vec{v}$
d. $4\vec{w}$
e. $\vec{v}-\vec{w}$
f. $\vec{u}-\vec{v}$
g. $3(\vec{v}+\vec{u})-2\vec{w}$
h. $2\vec{u}-3\vec{v}+\vec{w}$



Exercice 2

Soit le vecteur $\vec{v}$ ayant comme point initial P et comme point terminal Q. Écrivez $\vec{v}$ sous la forme $\vec{v} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$ et sous la forme $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

a. $P(0\,;0)$; $Q(3\,;4)$ $\qquad$ **b.** $P(3\,;2)$; $Q(5\,;6)$
c. $P(-2\,;-1)$; $Q(6\,;-2)$ $\qquad$ **d.** $P(-3\,;7)$; $Q(0\,;0)$

Supposons qu'un vecteur $\vec{v}$ a pour point initial $P_1(x_1\,;y_1)$ et comme point terminal $P_2(x_2\,;y_2)$. On a alors :

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \qquad \|\vec{w}\| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\vec{v}+\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}-\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$2\vec{v} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \|2\vec{v}\| = \sqrt{8^2+4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Exercice 4

Faites les calculs ci-dessous en utilisant $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a. $\vec{v}+\vec{w}$ $\qquad$ **b.** $\vec{w}-\vec{v}$
c. $-5\vec{v}$ $\qquad$ **d.** $\|\vec{v}\|$
e. $2\vec{v}+3\vec{w}$ $\qquad$ **f.** $3\vec{v}-2\vec{w}$
g. $\|\vec{v}-\vec{w}\|$ $\qquad$ **h.** $\|\vec{v}\|-\|\vec{w}\|$
i. le vecteur unité de direction $\vec{v}$.

Exercice 5

Définition du produit scalaire

Si $\vec{v}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{w}=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs du plan, alors le produit scalaire $\vec{v}\cdot\vec{w}$ est défini ainsi :

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=ac+bd \qquad (1)$$

Exemples Soient $\vec{v}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs. Calculez :

a. $\vec{v}\cdot\vec{w}$ **b.** $\vec{w}\cdot\vec{v}$ **c.** $\vec{v}\cdot\vec{v}$
d. $\vec{w}\cdot\vec{w}$ **e.** $\|\vec{v}\|$ **f.** $\|\vec{w}\|$

Solutions

a. $\vec{v}\cdot\vec{w} = 2\cdot5 + (-3)\cdot3 = 1$
b. $\vec{w}\cdot\vec{v} = 5\cdot2 + 3\cdot(-3) = 1$
c. $\vec{v}\cdot\vec{v} = 2\cdot2 + (-3)\cdot(-3) = 13$
d. $\vec{w}\cdot\vec{w} = 5\cdot5 + 3\cdot3 = 34$
e. $\|\vec{v}\|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$
f. $\|\vec{w}\|=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$

Angle entre deux vecteurs

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, l'angle α, $0° \leq \alpha \leq 180°$, compris entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par la formule :

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$ donne l'angle **aigu**

Exercice 6

Calculez le produit scalaire $\vec{v}\cdot\vec{w}$ et l'angle aigu entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

a. $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{w}=\vec{i}+\vec{j}$
b. $\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
c. $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{w}=\vec{i}+2\vec{j}$
d. $\vec{v}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
e. $\vec{v}=3\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{w}=4\vec{i}+3\vec{j}$
f. $\vec{v}=3\vec{i}-4\vec{j}$, $\vec{w}=\vec{i}+\vec{j}$
g. $\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$
h. $\vec{v}=\vec{i}$, $\vec{w}=-3\vec{j}$

Le **produit vectoriel** de $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ est le vecteur $\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

On donne les vecteurs $\vec{u}=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Calculez et comparez :

a. $\vec{u}\wedge\vec{v}$ et $\vec{v}\wedge\vec{u}$
b. $\vec{u}\wedge(2\vec{v})$, $(2\vec{u})\wedge\vec{v}$ et $2(\vec{u}\wedge\vec{v})$
c. $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})$ et $(\vec{u}\wedge\vec{v})+(\vec{u}\wedge\vec{w})$
d. $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$ et $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$

Exercice 8

Calculez $\|\vec{a}\wedge\vec{b}\|$ lorsque $\|\vec{a}\|=6$, $\|\vec{b}\|=5$ et l'angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ vaut 30°.