<u>Méthodes Géométriques en Physique</u>

Chapitre 2

Opérations sur les formes différentielles

Champs Vectoriels :

Soit U un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

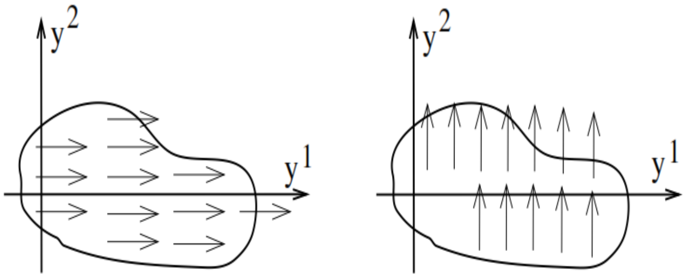
Un champs vectoriel v sur U , est une famille différentiable $V(x)$ de vecteurs en $\mathbb{R}^n$ indexés par des points en U (différentiable $\longrightarrow$ infiniment différentiable).

Exemple :

En coordonnée cartésiennes $y^\mu, \mu = 1, 2, \cdots, n$, chaque champs vectoriel sera décomposé en :

$$v = \sum_{\mu=1}^{n} v^\mu(x) \frac{\partial}{\partial y^\mu},$$

Où $\partial/\partial y^\mu$ sont des champs vecteurs avec des composantes cartésiennes (0,…..0,1,0,…….0)



_Note : Ici $\partial/\partial y^\mu$ n'est pas un opérateur différentiable, il n'est seulement qu'un symbole mais son utilité mnémotechnique vient de la définition en coordonnées arbitraire x^μ :

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(x) := \sum_\nu \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}(x) \frac{\partial}{\partial y^\nu}$$

Où$\frac{dy^\nu}{dx^\mu}$ est la matrice Jacobéenne de transformation des coordonnées en général.

Formes différentielles :

Par définition une (différentielle) $p -$ forme φ est une famille d'applications φ_x tel que :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_x : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v_1(x), \cdots, v_p(x)) & \longmapsto & \varphi_x(v_1(x), \cdots, v_p(x)). \end{array}$$

Chaque application φ_x doit être multilinéaire (en respectant les nombres réels) et alternées.

i.e. :

$$\varphi(\cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots) = -\varphi(\cdots, v_j, \cdots, v_i \cdots).$$

Pour des règles pratiques on doit omettre le x .

On dénote par $\Omega^p U$ l'ensemble de tous les p-forms sur U.

Notons que si $p > n$ cet ensemble contient seulement l'élément zéros. Pour $p = 0$ on définit $\Omega^0 U$ qui doit être l'ensemble de toutes les fonctions (différentiables) de U dans les nombres réels.

Produit externe (Wedge Product) :

Le produit externe d'une p-forme différentielle avec une q-forme est une $p+q$ forme définit par :

$$\wedge : \Omega^p U \times \Omega^q U \;\rightarrow\; \Omega^{p+q} U$$

$$(\varphi, \psi) \rightarrow \varphi \wedge \psi$$

$$(\varphi \wedge \psi)(v, \ldots, v_{p+q}) := \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi \in S} \operatorname{sig}\pi \quad \varphi(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(p)}) \psi(v_{\pi(p+1)}, \cdots, v_{\pi(p+q)}),$$

Où la somme est sur toutes les permutations des $(p+q)$ objets et $sign\pi$ est le signe de la permutation π.

Le produit externe est bilinéaire, associatif et gradué commutatif.

$$\varphi \wedge \psi = (-1)^{pq} \psi \wedge \varphi.$$

Dans n'importe quel système de coordonnées x^μ une p-forme est décomposée en :

$$\varphi = \sum_{\mu_1, \cdots, \mu_p} \varphi_{\mu_1, \cdots \mu_p}(x) \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_p},$$

Où pour chaque $\mu = 1,2, \ldots \ldots, n$, dx^μ est une 1-forme définit par :

$$\mathrm{d}x^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = \delta^\mu_\nu.$$

En langage tensoriel, un champ vectoriel v constitue un tenseur contravariant v^μ de degré (rang) 1 tandis que une p-forme constitue un tenseur covariant complètement antisymétrique $\varphi_{\mu_1 \ldots \mu_p}$ de degré p .

Une contraction complette d'une p-forme donne un nombre réel et le produit tensoriel correspond au produit tensoriel antisymétrisé de tenseurs covariants antisymétriques.

Dérivée externe :

On défini la dérivée externe d'une forme en utilisant un système de coordonnées x^μ :

$$\mathrm{d} : \Omega^p U \;\rightarrow\; \Omega^{p+1} U$$

$$\varphi \rightarrow \mathrm{d}\varphi$$

$$d\varphi := \sum_{\mu_1,\cdots,\mu_p,\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\varphi_{\mu_1\cdots\mu_p}\right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_p}.$$

Cette définition ne doit pas dépendre du choix du système de coordonnées x^{μ}.

La dérivée externe est un opérateur linéaire différentiel du premier ordre. Il obéit à la règle de Leibnitz :

$$\mathrm{d}(\varphi \wedge \psi) = (\mathrm{d}\varphi) \wedge \psi + (-1)^p \varphi \wedge \mathrm{d}\psi$$

et à la condition de Co-limites (co-boundary) :

$$\mathrm{d}^2 = 0$$

Cette condition veut dire que les dérivées partielles commutent.

Dans le langage tensoriel, la dérivée externe a la tache de prendre le gradient d'un tenseur covariant antisymétrique et donc antisymétriser l'index covariant du gracient avec les autres.

<u>Intégration :</u>

Soit φ une *p*-forme et *K* une partie suffisamment régulière de U de dimension *p* paramétriser par $\mathrm{x}^1, \mathrm{x}^2, \ldots \ldots, \mathrm{x}^p$, par exemple le cube.

Donc on définit l'intégrale de φ sur *K* :

$$\int_K \varphi = \int_K \varphi_{12\ldots\ldots p} \mathrm{dx}^1 \ldots \ldots \mathrm{dx}^p$$

où le membre de droite n'est que l'intégrale multiple de Riemann de la fonction coefficients de φ . L'ordre croissant des indices dans la fonction coefficients $\varphi_{12\ldots\ldots p}$ veut dire un nombre fixe des coordonnées de K, i.e. une orientation.

<u>Théorème de Stockes :</u>

Soit φ une $(p-1)$-forme, *K* est une partie de U de dimension p , ∂K est sa propre limite (boundary) orientée. Donc

$$\int_K d\varphi = \int_{\partial K} \varphi.$$

De ce théorème on peut facilement avoir les équations de champs d'une action. Ensemble avec la règle de Leibnitz ça permet de travailler sans les intégrales partielles, on peut remarquer aussi que limite de limite est nulle :

$$\partial\partial K = 0$$

Ce qui explique naturellement le terme condition de co-limites de :

$$\mathrm{d}^2 = 0$$

Formes différentielles à valeur vectorielle :

Soit W un espace vectoriel réel de dimension fini. Comme toutes les opérations introduites auparavant sont linéaires, on peut généraliser les formes diff à valeurs réelles au vecteurs dans W :

$$\Phi_x : \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow W.$$

Où on peut faire l'extension suivante : $\Omega^p(U, W)$ qui est l'ensemble des p-formes sur U avec des valeurs dans W. Où W peut être une algèbre de Lie ou un espace vectoriel avec des représentations linéaires de groupes de symétries.

Soit la base T_a, $a = 1, \ldots\ldots..,dimW$, chaque élément $\omega \in W$ peut être écrit par :

$$w = \sum_{a=1}^{\dim W} w^a T_a,$$

Où les ω^a sont des nombres réels.

Ce qui nous permet d'écrire pour chaque *p-forme* Φ avec des valeurs dans W :

$$\Phi = \sum_a \varphi^a T_a,$$

Où les φ^a sont des formes différentielles à valeurs réelles dans U.

Pour définir un produit extérieur dans ce cadre général. *W* doit avoir une loi de multiplication*, i.e.* W doit être une algèbre. Si *W* est une algèbre de Lie , on définit le commutateur d'un p-forme et une q-forme par.

$$[\Phi, \Psi](v_1, \ldots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi \epsilon S_{p+q}} \mathrm{sig}\pi[\Phi(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(p)}), \Psi(v_{\pi(p+1)}, \ldots, v_{\pi(p+q)}],$$

Ou en fonction de la base T_a par :

$$\Phi = \sum_a \varphi_a T^a \; ; \; \Psi = \sum_a \psi_a T^a$$

Et :

$$[\Phi, \Psi] = \sum_{a,b} \varphi_a \wedge \psi_b [T^a, T^b]$$

Avec :

$$[\Phi, \Psi] = -(-1)^{pq}[\Psi, \Phi]$$

Le commutateur obtenu est commutatif gradué.

Référentiels :

Métriques :

Hodge Star :

On défini l'application Hodge star par :

$$*: \Omega^p U \;\rightarrow\; \Omega^{p+1} U$$

$$\varphi \rightarrow * \,\varphi$$

$$\begin{aligned} * \varphi \quad := \quad & \frac{1}{(n-p)!} \sum_{\mu_{p+1} \cdots \mu_n} \left[\frac{1}{p!} \sum_{\mu_1 .. \mu_p} \epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_n} \sqrt{|\det g_{..}|} \right. \\ & \left. \times \sum_{\nu_1 \cdots \nu_p} \varphi_{\nu_1 \cdots \nu_p} g^{\mu_1 \nu_1} \cdots g^{\mu_p \nu_p} \right] \mathrm{d}x^{\mu_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_n}, \end{aligned}$$

On voit que la p-forme a été transformée en (n-p)forme. Où $\varepsilon_{\mu_1 \ldots\ldots \mu_n}$ est le tenseur complètement antisymétrique, avec $\varepsilon_{1 \ldots\ldots\ldots n}$.

La Hodge star est purement linéaire et son carrée est donnée par :

$$** \,\varphi = (-1)^{p(n-1)+s} \varphi$$

Où s est le nombre des signes moins dans la métrique.

Co-dérivée et opérateur de Laplace :

C'est un opérateur linéaire différentiel du premier ordre et qui fait baisser le degré de la forme diff par une unité :

$$\delta : \Omega^p U \ \rightarrow \ \Omega^{p-1} U$$

$$\varphi \rightarrow \delta\varphi = (-1)^{np+n+1+s} * \mathrm{d} * \varphi$$

Avec la même propriété que la dérivée externe :

$$\delta^2 = 0$$

Si U est ''compacte'' et si on ait dans une métrique euclidienne, donc on peut définir un espace préhilbertien qui pour produit scalaire :

$$(\kappa, \varphi) = \int_U \kappa \wedge * \, \varphi$$

Pour deux formes différentielles κ, φ du même degré, le produit scalaire disparait si les degrés ne sont pas égaux. Dans ce cas la co-dérivée est l'adjoint formel de la dérivée externe.

En général, l'opérateur de Laplace est l'opérateur linéaire du 2^{nd} ordre définit par :

$$\Delta = -(d\delta + \delta d) : \Omega^p U \longrightarrow \Omega^p U$$

Si la métrique est euclidienne, l'opérateur de Laplace est Hermitien. Si la métrique est autre, l'opérateur de Laplace est usuellement nommé l'opérateur de D'Alembert $\boxdot$.

Résumé :

D'une manière un peux plus simple on peut résumer les opérateurs définis auparavant dans le tableau ci-dessous :

v	v^{μ}
$\varphi \in \Omega^p U$	$\varphi_{[\mu_1 \cdots \mu_p]}$
$\varphi(v_1, v_2, \cdots, v_p)$	$\sum_{\mu_1 \cdots \mu_p} \varphi_{[\mu_1 \cdots \mu_p]} v_1^{\mu_1} \cdots v_p^{\mu_p}$
$\varphi \wedge \psi$	$\varphi_{[\mu_1 \cdots \mu_p} \quad \psi_{\mu_{p+1} \cdots \mu_q]}$
$d\varphi$	$\partial_{[\mu_1} \varphi_{\mu_2 \cdots \mu_{p+1}]}$
$\int_K \varphi$	$\int_K \varphi_{1 \cdots p} \, dx^1 \cdots dx^p$
g	$g_{(ij)}$
g^*	$g^{ij} = (g^{-1})_{ij}$
$* \varphi$	$\sum_{\substack{\mu_1 \cdots \mu_p \\ \nu_1 \cdots \nu_p}} \sqrt{\lvert \det g_{..} \rvert} \, \varphi_{\nu_1 \cdots \nu_p} g^{\nu_1 \mu_1} \cdots g^{\nu_p \mu_p} \epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_p, \mu_{p+1} \cdots \mu_n}$
$-d * d * - * d * d$	Δ

Equations de Maxwell :

Considérons l'espace de Minkowski $U = \mathbb{R}^4$ et sa métrique avec la signature $+ - - -$.

Les sources, la charge, électrique et les densités de courants, sont combinées dans des trois formes différentielles à valeurs réelles.

$$j = \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} j^{\mu} \mathrm{d}x^{\nu} \wedge \mathrm{d}x^{\lambda} \wedge \mathrm{d}x^{\rho} \quad \in \quad \Omega^3(\mathbb{R}^4).$$

Si on intègre *j* sur un espace à trois dimensions par exemple le volume, donne la charge totale dans ce volume en fonction du temps. Et la conservation de la charge est donnée par.

$$\mathrm{d}j = 0$$

L’intensité du champ est une 2-forme à valeur réelle.

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \mathrm{dx}^{\mu} \wedge \mathrm{dx}^{\nu}$$

Et les équations de Maxwell sont :

$$\mathrm{d}F = 0 \qquad *$$

$$\delta F = \frac{1}{\varepsilon_0 \mathrm{c}^2} * \mathrm{j} \qquad **$$

L’équation $(**)$ ⇒ la conservation de la charge. Donc seuls les courants conservés $\mathrm{d}j = 0$, qui peuvent être couplés au champs EM.

$(*)$ Implique l’existence d’un potentiel *A* qui est une 1-forme à valeurs réelles tel que :

$$F = \mathrm{d}A$$

Et $(**)$ peut être obtenue de l’action, en fonction du potentiel.

$$S[A] = -\int_{\mathbb{R}^4} \left(\frac{\epsilon_0 c}{2} F \wedge *F + \frac{1}{c} j \wedge A \right)$$

Ecrire la théorie de Maxwell qvec les formes différentielles o les 4 avantages suivants.