Chapitre IV
Géometrie Non Commutative

IV.1. Introduction:

La GNC considère le champ du Higgs, comme étant un champs magnetique qui accompagne certains champs de Yang-Mills, parmis eux certains du modèle standard.

- Yang-Mills + GNC = Yang-Mills-Higgs

Pour construire l'action de Yang-Mills $\int (F, *F)$, on a besoin de 4 ingrédients. Des formes differentielles sur M (espace-temps). Un groupe de Lie G 'espace interne'. Un produit scalaire sur l'espace des formes differentielles ΩM. Un produit scalaire sur l'agèbre de lie $\mathfrak{g}$ du groupe G. Le 1er produit scalaire implique une métrique cachée de l'espace temps dans le produit Hodge star $(*)$.

$$(\kappa, \varphi) := \int_M \kappa^* * \varphi$$

tel que κ et φ des formes differentielles du même degré, et le 2ème produit scalaire est

$$(a, b) = \frac{2}{g_n^2} \operatorname{tr}(a^* b), \quad a, b \in SU(n)$$

g_n : constante de couplage positive.

- La GNC dans sa version presque commutative, unifie l'espace-temps et l'espace interne et les deux produits scalaires dérivent donc d'un seul produit scalaire commun. Et en meme temps, les transformation de coordonnées dans l'espace-temps sont unifiées avec les transformations de Jauge.

IV.2. Triplet spectrale:

La GNC doit à l'espace-temps $\mathcal{M}$, ce que la $\mathcal{M}Q$ doit à l'espace de phases.

Hamilton + Geometrie Non Commutative = schrodinger.

Pour que l'algèbre commutative des fonctions devienne non commutative, on doit introduire une certaine relation d'incertitude. Soit $\mathcal{A}$ cette nouvelle algebre, qu'on suppose définit sur les nombres réels, qui est associative et équipée d'une unité et une involution $<,>$, $\mathcal{A}$ est l'algebre des observables quantiques. Maintenant on a une metrique dans l'espace-temps $\mathcal{M}$, mais comment definir une distance dans un qui a perdu ses point? pour cela on a besoin d'une représentation fidelle ρ de $\mathcal{A}$ via des operateurs bornés dans l'espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$, l'espace des fermions, et un operateur autoadjoint $\mathcal{D}$ 'Dirac' sur $\mathcal{H}$. Connes nomme ces trois ingrédients 'le triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ qui satisfonts des axiomes. Ces axiomes sont simples, ils sont obtenus des propriétés du cas commutatif $\mathcal{A} = C^\infty(\mathcal{M})$.

si on considère l'espace temps M comme étant euclidien et compacte, l'espace de Hilbert, est l'espace ordinaire des spineurs de Dirac à carré sommable. Un élément f de A est une fonction différentiable dans l'espace-temps, $f(x)$, et il agit sur le spineur $\psi(x)$ par multiplication tel que :

$$\boxed{(\pi(f)\psi)(x) := f(x)\psi(x)}$$

$D = \not{\partial}$ est l'opérateur de Dirac ordinaire.

Au début, il y'avait cinq axiomes introduit par Connes et puis il les a completer par deux autres, dans le but d'avoir une correspondance, un à un entre les triplets spectraux commutatifs et les variétés à Spin Riemaniennes. Pour cela, on a besoin de l'opérateur de chiralité χ et l'operateur de structure réelle J. L'opérateur de chiralité de chiralité est un operateur unitaire qui commutte avec la représentation, aussi χ elle decompose la représentation de l'espace en une partie left-handed $(1-\chi)/2\,\mathcal{H}$ et right-handed $(1+\chi)/2\,\mathcal{H}$, dans le cas commutatif $\chi = \gamma^5$. L'opérateur de structure reelle, est un opérateur anti-unitaire qui se reduit dans le cas ordinaire à l'opérateur conjugaison de charge. La conjugaison de charge decompose aussi la représentation de l'espace en deux parties, particules et anti-particules

$$\boxed{\mathcal{H} = \mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_R \oplus \mathcal{H}_L^c \oplus \mathcal{H}_R^c}$$

on peut citer quelques propriétés du cas commutatif qui deviennent des axiomes :

- $\rho(a)$ commutte avec $J\rho(\bar{a})J^{-1}$, pour tout $a, \bar{a} \in A$.
- $\mathcal{D}\chi = -\chi\mathcal{D}$
- $\mathcal{D}J = +J\mathcal{D}$
- $[\mathcal{D}, \rho(a)]$ est borné pour tout a dans A
- $[\mathcal{D}, \rho(a)]$ commutte avec $J\rho(\bar{a})J^{-1}$ pour tout $a, \bar{a} \in A$.

Ce dernier axiome est nommé 1er ordre, ce qui veut dire que l'opérateur de Dirac est un opérateur différentiel du 1er ordre. Bien sûr pour les variétés compactes le spectre est discret et les valeurs propres λ_n ont la forme $n^{1/\dim M}$. Ce qui a motivé la nomination "triplet spectrale".

Les axiomes 6 et 7, sont l'axiome d'orientabilité et la dualité de Poincarré.

- Puisque on soit dans une signature euclidéenne pour un espace-temps à 4-dimension, on obtient le spineur qui a 4 composantes à carré sommable.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}^2(S)$$

L'operateur de Dirac plat est :

$$\partial\!\!\!/\,\psi := i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi .$$

IV.3 Le Produit scalaire en GNC :

Pour tout operateur borné, positif sur $\mathcal{H}$, on definit la trace de Dixmier tr_ω par :

$$tr_\omega(a|D|^{-\dim}) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n$$

où λ_n sont les valeurs propres de $a|D|^{-\dim}$.

On definit le produit scalaire dans $\pi(\Omega A)$ par :

$$\langle \kappa, \varphi\rangle := Re\, tr_\omega(\kappa^* \varphi |D|^{-\dim}), \quad \kappa, \varphi \in (\Omega^p A)$$

Dans le cas commutatif, pour un espace temps M à 4 dimension ce produit scalaire s'ecrit

$$\langle \kappa, \varphi\rangle = \frac{1}{32\pi^2} Re \int_M tr[\kappa^* \varphi]\, d^4x .$$

qui est independant de M. tr_4 est la trace sur les matrices γ.

Avec cette définition $\Omega_D A$ est un sous espace de $\pi(\Omega A)$, qui est par definition orthogonal au Junk, et comme un sous espace $\Omega_D A$ hérite d'un produit scalaire qui est noté par :

$$(\kappa, \varphi) = \langle \kappa, \varphi \rangle \quad ; \quad \kappa, \varphi \in \Omega_D^p A .$$

Dans le cas commutatif à 4 dim et grace aux resultats connus pour $tr_4[\gamma^{\mu_1} v_{\mu_1} \cdots \gamma^{\mu_q} v_{\mu_q}]$, ce produit ce produit scalaire est nul pour les formes de degrés différents. le produit scalaire correspondant est :

$$(\kappa, \varphi) = \frac{1}{8\pi^2} Re \int_M \kappa^* * \varphi , \quad \kappa, \varphi \in \Omega^p M$$

VI.4. Action Commutative de Yang-Mills.

La reconstruction de la theorie de Maxwell, se fait d'une maniere naturelle, cette reconstruction unifie l'espace-temps et l'espace interne, $G = U(1)$. le 1er signe de cette unification vient du groupe des unitaires de A. rappellons que A est l'algèbre des fonctions à valeurs complexes dans M, avec l'operation complexe conjuguée qui est définit comme étant l'involution.

le groupe des unitaires $U(A) := \{ u \in A, \, u u^* = u^* u = 1 \}$.

c'est le groupe des fonctions de l'espace-temps dans $U(1)$ et c'est tout à fait le groupe de Jauge de Maxwell,

$U(A) = {}^M U(1)$.

le 4-vect potentiel de Maxwell $\in \Omega^1_D A$ est un 1-forme la transformation de Jauge-Unitaire $u = \exp i\sigma$ qui agit d'une maniere affine sur le potentiel de Jauge par :

$$\rho_v(u) A := \rho(u) A \rho(u^{-1}) + \rho(u) \, d \, \rho(u^{-1})$$
$$= A - i d\sigma$$

et le champs d'intensité est :

$$F := dA + A^2 = dA \in \Omega^2_D A$$

et qui est invariant de Jauge tel que :

$$\rho_v(u) F = \rho(u) F \rho(u)^{-1} = F.$$

et l'action de Maxwell invariante / transformation de Jauge :

$$S_{Maxwell}[A] = z(F,F) = z\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}_\omega(F^*F|\not{D}|^{-4})$$
$$= \frac{z}{8\pi^2}\int_M F^* \star F$$
$$= \frac{z}{16\pi^2}\int_M F^*_{\mu\nu}F^{\mu\nu}(\det g)^{1/2}d^4x$$
$$= \frac{\varepsilon_0}{4c^2}\int_M F^*_{\mu\nu}F^{\mu\nu}(\det g)^{1/2}d^4x$$

$z = \pi/\alpha_{em}$: constante de couplage fine

$$\alpha_{em} = e^2/(4\pi\varepsilon_0\hbar c)$$

et l'action fermionique (ou de Dirac) :

$$S_D[\psi, A] = \int_M \psi^* \not{D} \psi |\det g|^{1/2} d^4x$$

4.5 Geometrie presque commutative :

Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{L}^2(S), \not{D}, \gamma_5, G)$, le triplet spectral commutatif de l'espace temps à 4 dimension et $(\mathcal{A}_f, \mathcal{H}_f, \mathcal{D}_f, \chi_f, J_f)$ (f pour fini) l'un des triplets spectrales de l'espace interne

G : est anti-unitaire. Le produit tensoriel de ces deux triplets en se basant sur les lois de la GNC est : $(\mathcal{A}_t, \mathcal{H}_t, \mathcal{D}_t, \chi_t, J_t)$ (t : pour le produit tensoriel)

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{F}\otimes\mathcal{A}_f \;,\; \mathcal{H}_t = \mathcal{L}^2(S)\otimes\mathcal{H}_f \;,\; \mathcal{D}_t = \not{D}\otimes 1 + \gamma_5\otimes\mathcal{D}_f$$
$$\chi_t = \gamma_5\otimes\chi_f \;,\; J_t = C\otimes J_f \;. \quad \mathcal{F} = C^\infty(M)$$

Des axiomes de la GNC et en respectant la decomposition de Hilbert $\mathcal{H}_f$. Nous obtenons la forme suivante de l'operateur de Dirac interne :

$$\mathcal{D}_f = \begin{pmatrix} 0 & M & 0 & 0 \\ M^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{M} \\ 0 & 0 & \bar{M}^* & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \mathcal{D}_f = \begin{pmatrix} 0 & M & 0 & 0 \\ M^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{M}$ est la matrice de masse fermionique.

C'est une autre manifestation de l'unification de l'espace-temps et l'espace interne, puisque l'opérateur $\not{D}$ et sa matrice de masse obeissant aux mêmes axiomes.

Comme dans le cas commutatif, on commence par l'identification du groupe de Jauge ou les fonctions de l'espace-temps dans le groupe de Lie de dimension finie $G = U(A_f)$, est représenté d'une manière affine par par les champs bosoniques qui sont anti-Hermitien 1-forms tel que :

$$\Omega^1_{D_t} A_t = \Omega^1_{\not{D}} F \otimes \Omega^0_{D_f} A_f \oplus \Omega^0_{\not{D}} F \otimes \Omega^1_{D_f} A_f$$

$$\cong \Omega^1(\mathcal{M}, A_f) \oplus F \otimes \Omega^1_{D_f} A_f \ni A_t =: (A, H)$$

de l'anti-Hermiticité de $A_t \Longrightarrow$

A : est un 1-forme dans l'espace-temps à valeurs dans l'algèbre de Lie

$A \in \Omega^1(\mathcal{M}, \mathfrak{g})$, i.e un potentiel de Yang-Mills.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(A_f) := \{ X \in A_f : X + X^* = 0 \}$, qui est l'algebre de Lie qui a pour groupe des unitaires $G = U(A_f)$

H : le Higgs scalaire est un 0-form dans l'espace-temps à valeurs dans la représentation du groupe G.

Dans ce cas, les lois de transformations qui sont inhomogènes

$$\rho_{tV}(u) A_t := \rho_t(u) A_t \rho_t(u^{-1}) + \rho_t(u)\, \delta_t\, \rho_t(u^{-1})$$
$$= (\rho_V(u) A, \rho_S(u) H)$$

$$\rho_v(u)A = \rho_f(u)A\rho_f(u^{-1}) + \rho_f(u)\, d\, \rho_f(u^{-1})$$
$$\rho_s(u)H = \rho_f(u)H\rho_f(u^{-1}) + \rho_f(u)\,\delta_f\, \rho_f(u^{-1})$$

ρ_s : determine comment le Higgs scalaire se transforme et qui dépend des détails du triplets spectrale.

L'intensité du champs est :

$$F_t = \delta_t A_t + A_t^2 \in \Omega^2_{D_t} \mathcal{A}$$

pour le decomposer, il est préférable de faire le changement de variables suivant :

$$\Phi(x) = H(x) - i\,\mathcal{D}_f = -\Phi^* \in \Omega^0(\Pi, \Omega^1_{\mathcal{D}_f} A_f)$$

Ce qui nous permet de définir la dérivée covariante externe de Φ par :

$$D\Phi := d\Phi + [\rho_f(A), \Phi] \in \Omega^1(\Pi, \Omega^1_{\mathcal{D}_f} A_f)$$

Ce donne la décomposition du champs intensité suivante :

$$F_t = (F,\ C - \alpha C,\ -D\Phi\gamma_5)$$

avec :
$$F = dA + A^2 \in \Omega^2(\Pi, \mathfrak{g})$$
$$C = \delta_f H + H^2 \in \Omega^0(\Pi, \Omega_{\mathcal{D}_f} A_f).$$

C : Courbure.

4.6 Minimaxe Exemple :

Considerons le triplet spectrale :

$$\mathcal{A} = \mathbb{H} + \mathbb{C} \ni (a, b)$$
$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_L \oplus \mathcal{H}_R \oplus \mathcal{H}_L^c \oplus \mathcal{H}_R^c = (\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C} + \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^N$$
$$\rho(a,b) = \begin{pmatrix} \rho_L(a) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_R(b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_L^c(b) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_R^c(b) \end{pmatrix}$$

L'operateur de Dirac plat est :

$$\partial\!\!\!/ \psi := i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi .$$

On choisit les matrices γ auto-adjointes :

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \gamma^3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Qui satisfont la relation d'anti-commutation :

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} I .$$

avec :

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

L'operateur de chiralité est par definition :

$$\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Qui est unitaire et de carré egal à l'unité. En plus il anti-commutte avec toutes les autres matrices γ.

$$\gamma^\mu\gamma^5 + \gamma^5\gamma^\mu = 0$$

L'operateur de Dirac est impair tel que :

$$\partial\!\!\!/ \gamma_5 + \gamma_5 \partial\!\!\!/ = 0$$

La conjugaison de charge est :

$$\psi^c = \gamma^0\gamma^2\psi^*$$

Notons que dans le cas de l'espace-temps à 4 dimensions, la chiralité commutte avec la conjugaison de charge :

$$(\psi_L)^c := (\psi^c)_L := \psi^c_L$$

$$= \begin{pmatrix} a\otimes 1_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{b}1_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho}_L^c(b) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\rho}_R^c(b) \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \Pi & 0 & 0 \\ \Pi^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \Pi_e, \quad \Pi_e = \begin{pmatrix} m_e & 0 \\ 0 & m_\mu \end{pmatrix}$$

$$\chi = \begin{pmatrix} -1_{2N} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1_{2N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_N \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1_{3N} \\ 1_{3N} & 0 \end{pmatrix} \circ \text{conjugaison complexe}$$

$\mathbb{H}$ est l'algèbre réelle à 4 dimensions des quaternions, où ses éléments sont des matrices 2×2 complexes

$$a = \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix} \quad x, y \in \mathbb{C}.$$

L'involution dans $\mathbb{H}$ est la conjugaison Hermitique et son groupe unitaire est $SU(2)$, l'algèbre $\mathbb{C}$ contenant b est aussi réelle, à deux dimensions.

La base physique de l'espace de Hilbert complexe fermionique est :

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, e_R, \mu_R, \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L^c, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L^c, e_R^c, \mu_R^c.$$

N : Nombre de famille, dans ce cas $N = 2$.

En calculant :

$$[D, \rho(a,b)] = \begin{pmatrix} 0 & \Upsilon\,\rho_R(b) - \rho_L(a)\Upsilon & 0 & 0 \\ \Upsilon^*\rho_L(a) - \rho_R(b)\Upsilon^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dans ce modèle on a :

$$\Upsilon\,\rho_R(b) = \rho_L\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix}\Upsilon = \rho_L(B)\,\Upsilon$$

ce qui nous permet d'avoir une 1-form qui est la somme des termes :

$$\pi\big((a_0,b_0)\,\delta(a_1,b_1)\big) = -i\begin{bmatrix} 0 & \rho_L(a_0(B_1-a_1))\Upsilon & 0 & 0 \\ \Upsilon^*\rho_L(B_0(a_1-B_1)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Omega^1_D A = \left\{ i\begin{bmatrix} 0 & \rho_L(h)\Upsilon & 0 & 0 \\ \Upsilon^*\rho_L(\tilde{h}^*) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ h, \tilde{h} \in \mathbb{H} \right\}$$

Donc le Higgs est un Hermitien 1-form

$$H = i\begin{bmatrix} 0 & \rho_L(h)\Upsilon & 0 & 0 \\ \Upsilon^*\rho_L(\tilde{h}^*) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ h = \begin{pmatrix} h_1 & -\bar{h}_2 \\ h_2 & \bar{h}_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$$

qui est paramétrisé par un doublet complexe $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$, $h_1, h_2 \in \mathbb{C}$

et un élément quelconque dans $\pi(\Omega^2 A)$ est :

$$\pi\big((a_0,b_0)\,\delta(a_1,b_1)\,\delta(a_2,b_2)\big) =$$

$$\begin{pmatrix} \rho_L(a_0)\rho(a_1-B_1)\Upsilon\Upsilon^*\rho_L(a_2-B_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Upsilon^*\rho_L(B_0)\rho_L(a_1-b_1)\rho_L(a_2-B_2)\Upsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si on prend le 1^{er} élément de la matrice et qu'on le développe sous la forme suivante :

$$(1_2 \otimes \Sigma)\, \rho_L(a_0)\, \rho_L(a_1 - B_1)\, \rho_L(a_2 - B_2) + (1_2 \otimes \Delta)\, \rho_L(a_0)\, \rho_L(a_1 - B_1)(\sigma_3 \otimes 1_N) \cdot \rho_L(a_2 - B_2).$$

où on a utilisé la décomposition suivante :

$$\Pi\Pi^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Pi_e \Pi_e^* \end{pmatrix} = 1_2 \otimes \Sigma + \sigma_3 \otimes \Delta$$

avec :

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \quad \Sigma = \tfrac{1}{2} \Pi_e \Pi_e^* \cdot \quad \Delta = -\tfrac{1}{2} \Pi_e \Pi_e^*$$

un élément de $(\ker\pi)'$ est une somme finie de la forme.

$$\sum_j (a_0^j \cdot b_0^j)\, \delta(a_1^j \cdot b_1^j)$$

pour que un élément de $(\ker\pi)'$ soit nul

$$\Rightarrow \left[\sum_j \rho_L(a_0^j)\, \rho_L(a_1^j - B_1^j)\right]\Pi = 0.$$

$$\Pi^*\left[\sum_j \rho_L(B_0^j)\, \rho_L(a_1^j - B_1^j)\right] = 0$$

et l'élément correspondant dans $\pi\delta(\ker\pi)'$ a une partie qui ne s'annulle pas, c'est la partie :

$$(1_2 \otimes \Delta) \sum_j \rho_L(a_0^j - B_0^j)\,(\sigma_3 \otimes 1_N)\, \rho_L(a_1^j - B_1^j)$$

et donc on peut conclure que :

$$\pi(\delta(\ker\pi)') \supset \left\{ i \begin{pmatrix} (1_2 \otimes \Delta) \sum_j \rho_L(a_0^j (i\sigma_3)\, a_1^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \sum_j a_0^j a_1^j = 0 \right\}.$$

Donc on peut dire que ρ_L est fidelle et que :

$$\left\{ \sum_j a_0^j (i\sigma_3)\, a_1^j \cdot \sum_j a_0^j a_1^j = 0 \right\}$$

est un élément de $\mathbb{H}$ et cet élément n'est pas nul par exemple.

$$a_0^1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad a_1^1=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad a_0^2=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix},\quad a_1^2=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$$

avec :

$$\sum_j a_0^j(i\sigma_3)a_1^j=-2\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$$

Donc, le Junk dans notre cas est :

$$J^2=\pi(\delta(\ker\pi)^1)=\left\{i\begin{pmatrix}d\otimes\Delta&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ d\in\mathbb{H}\right\}$$

et en éliminant le Junk du produit scalaire on a :

$$\Omega_D^2A=\left\{\begin{pmatrix}\tilde{c}\otimes\Sigma&0&0&0\\0&\pi^*\rho_L(c)\pi&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \tilde{c},c\in\mathbb{H}\right\}$$