Solution du TD 04

Exercice 02 :

Déterminer l'indice de performance d'un arbre plein de section carrée, pour une torsion élastique, les objectifs étant la rigidité et la légèreté.

Fonction : doit supporter une charge de torsion

Objectif : minimiser la masse

Contrainte : l'angle de torsion (θ) provoqué par un couple donné T ne doit pas dépasser un certain niveau.

Solution

Pour une section carrée, le moment de torsion (K) est donné par la formule suivante :

$K = \frac{bh^3}{3}\left(1 - 0.58\frac{b}{h}\right) \Rightarrow K = 0.14b^4$ Puisque b=h.

$$\Phi_{\mathrm{T}}^{\mathrm{e}} = \frac{2\pi K}{A^2} \Rightarrow K = \Phi_{\mathrm{T}}^{\mathrm{e}}.\frac{A^2}{2\pi}$$

Sachant que :

$$S_T = \frac{K.G}{l} \Rightarrow S_T = \frac{\Phi_{\mathrm{T}}^{\mathrm{e}}.\frac{A^2}{2\pi}.G}{l} \Rightarrow S_T = \frac{\Phi_{\mathrm{T}}^{\mathrm{e}}.A^2.G}{2\pi l} \Rightarrow A = \left(\frac{S_T.2\pi l}{\Phi_{\mathrm{T}}^{\mathrm{e}}G}\right)^{\frac{1}{2}}$$

L'objectif étant de minimiser la masse, donc la fonction performance est :

$$m = \rho.l.A$$

$$m = \rho.l.\left(\frac{S_T.2\pi l}{\Phi_{\mathrm{T}}^{\mathrm{e}}G}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow m = (S_T.2\pi)^{\frac{1}{2}}.l^{3/2}.\frac{\rho}{(\Phi_{\mathrm{T}}^{\mathrm{e}}G)^{\frac{1}{2}}}$$

Minimiser la masse revient à minimiser le terme suivant :

$$IP = \frac{(\Phi_{\mathrm{T}}^{\mathrm{e}}G)^{1/2}}{\rho}$$

Si

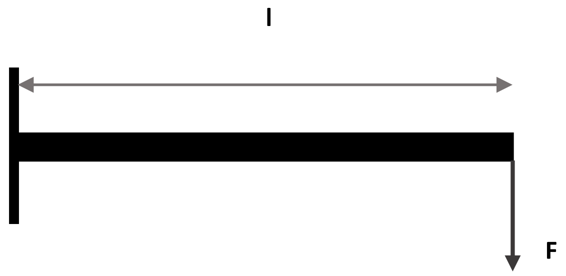
$$G \approx \frac{3}{8}E$$

$$m = \left(\frac{8.S_T.2\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.l^{3/2}.\frac{\rho}{(\Phi_{\mathrm{T}}^{\mathrm{e}}E)^{\frac{1}{2}}}$$

$$IP = \frac{(\Phi_{\mathrm{T}}^{\mathrm{e}} E)^{1/2}}{\rho}$$

Exercice 03: résistance-légèreté

Une poutre circulaire en flexion, montrée sur la figure 1, notre objectif c'est de choisir un matériau résistant -léger pour ce système :



Objectif : Poutre résistante**-légère**

Variables libre : l'aire de la section et le matériau

Contraintes : la longueur de la barre (L).

Solution

$$\Phi_{\mathrm{F}}^{\mathrm{f}} = \frac{Z}{Z^0} \Rightarrow Z = Z^0 . \Phi_{\mathrm{F}}^{\mathrm{f}}$$

Sachant que

$$Z^0 = \frac{A^{\frac{3}{2}}}{4.\sqrt{\pi}}$$

Donc

$$Z = \frac{A^{\frac{3}{2}}}{4.\sqrt{\pi}} . \Phi_{\mathrm{F}}^{\mathrm{f}}$$

Et

$$\sigma = \frac{M_t . Y_m}{I} \Rightarrow \sigma = \frac{M_t}{Z} \Rightarrow M_t = \sigma . Z \Rightarrow M_t = \frac{A^{\frac{3}{2}}}{4.\sqrt{\pi}} . \Phi_{\mathrm{F}}^{\mathrm{f}} . \sigma$$

Donc

$$A = \left(\frac{M_t . 4\sqrt{\pi}}{\Phi_{\mathrm{F}}^{\mathrm{f}} . \sigma}\right)^{\frac{2}{3}}$$

La fonction performance est la légèreté de la poutre, donc on doit minimiser la masse (m) :

$$m = \rho . l . A$$

$$m = \rho . l . \left(\frac{M_t . 4\sqrt{\pi}}{\Phi_{\mathrm{F}}^{\mathrm{f}} . \sigma}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$m = \left(M_t . 4\sqrt{\pi}\right)^{2/3} . \frac{\rho}{\left(\Phi_{\mathrm{F}}^{\mathrm{f}} . \sigma\right)^{\frac{2}{3}}}$$

Donc

$$IP = \frac{\left(\Phi_{\mathrm{F}}^{\mathrm{f}}.\sigma\right)^{\frac{2}{3}}}{\rho}$$

Exercice 04: Résistance-légèreté

Déterminer l'indice de performance pour un arbre d'une section quelconque. Sachant que $Q_0 = \frac{\pi.r^3}{2}$ et $\tau \simeq \frac{\sigma}{2}$, l'objectif étant la résistance et la légèreté.

Solution

On a :

$$\Phi_T^{\mathrm{f}} = \frac{Q}{Q_0} \Longrightarrow Q = Q_0.\Phi_T^{\mathrm{f}} \Longrightarrow Q = \Phi_T^{\mathrm{f}} \frac{A^{\frac{3}{2}}}{2.\sqrt{\pi}}$$

Et

$$T = \tau.Q \Rightarrow T = \Phi_T^{\mathrm{f}} \frac{A^{\frac{3}{2}}}{2.\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sigma}{2}$$

La variable libre est l'air (A), donc :

$$A = \left(\frac{4\sqrt{\pi}.T}{\Phi_T^{\mathrm{f}}.\sigma}\right)^{2/3}$$

La masse de l'arbre est donnée par ce qui suit :

$$m = \rho.L.A \Longrightarrow m = \rho.L.\left(\frac{4\sqrt{\pi}.T}{\Phi_T^{\mathrm{f}}.\sigma}\right)^{2/3}$$

$$m = (4.\sqrt{\pi}.T)^{3/2}.L.\left(\frac{\rho}{\left(\Phi_T^{\mathrm{f}}.\sigma\right)^{2/3}}\right)$$

Donc l'indice de performance I.P :

$$IP = \frac{\left(\Phi_T^{\mathrm{f}}.\sigma\right)^{2/3}}{\rho}$$