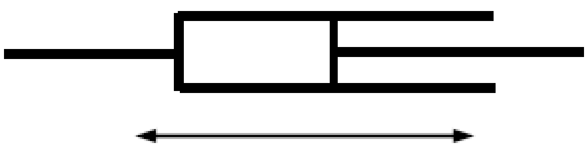
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

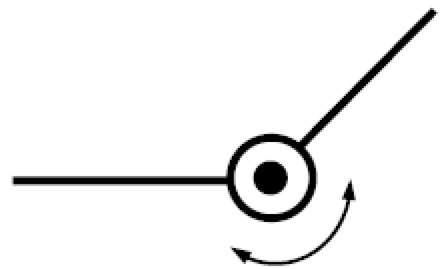
Robotique industrielle

Master I Fabrication mécanique et productique

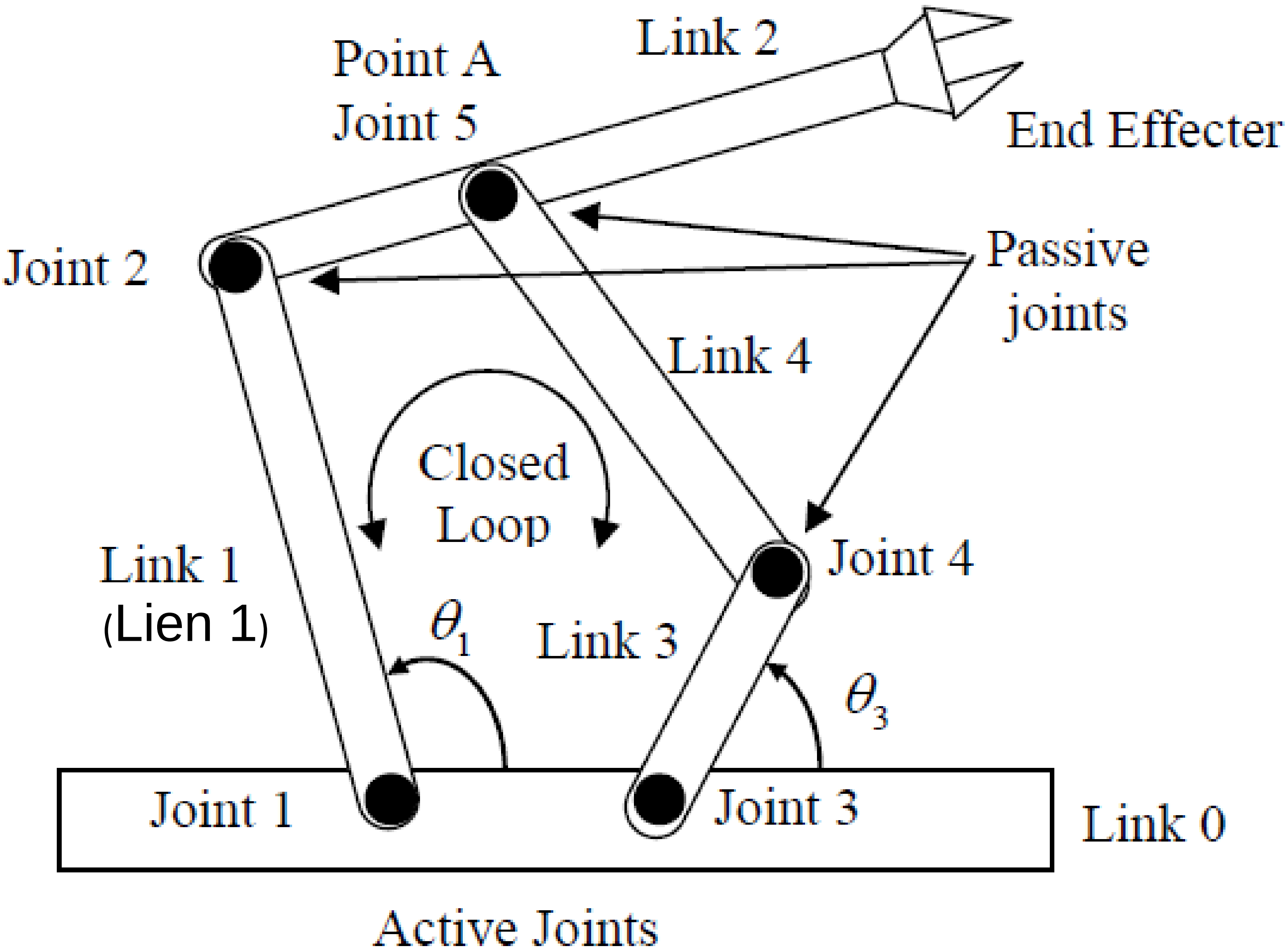
Par : Dr. Slamani Mohamed



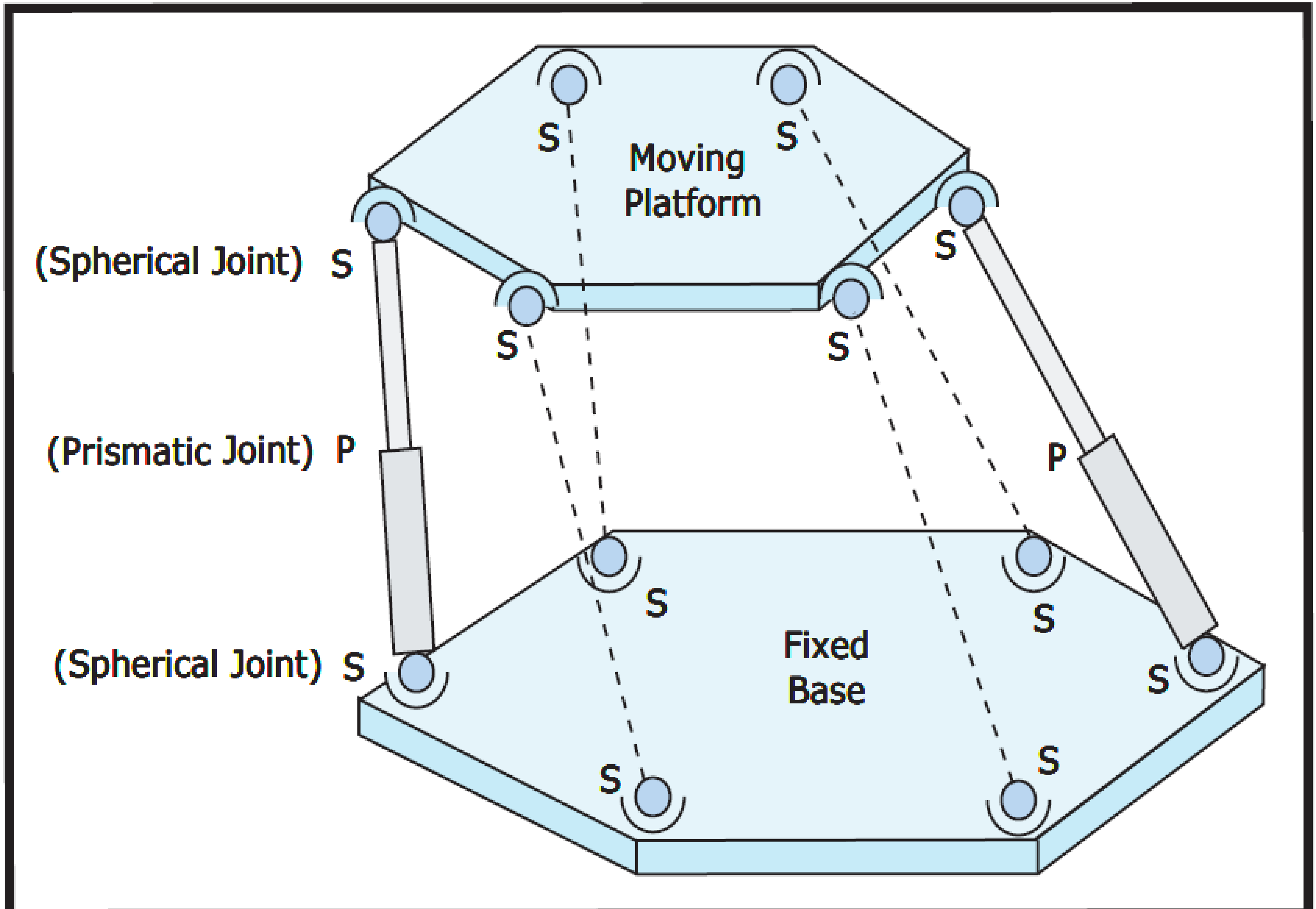
Articulations prismatiques



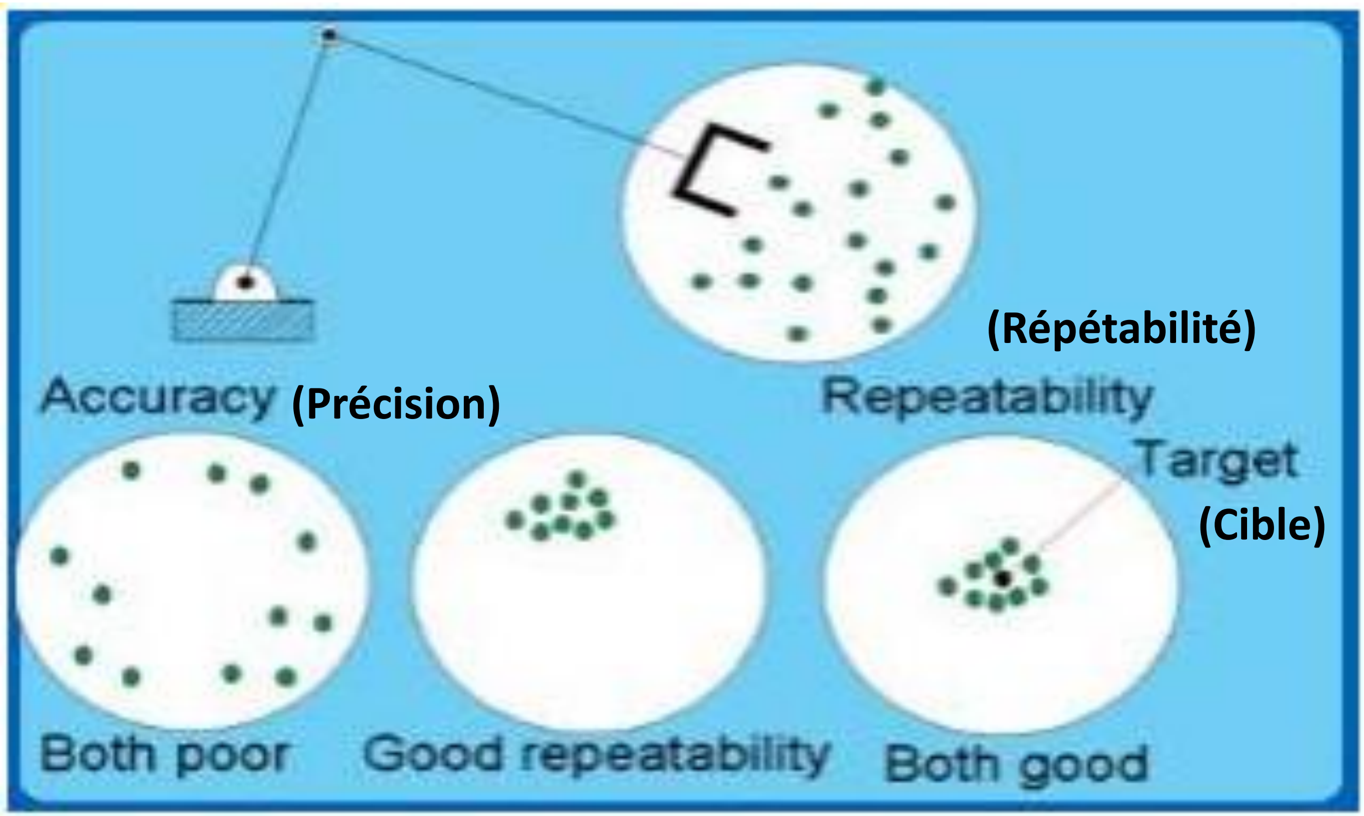
Articulations rotoïdes


Point A
Joint 5
Link 2
End Effecter
Joint 2
Passive
joints
Link 4
Closed
Loop
Link 1
(Lien 1)
θ_1
Link 3
Joint 4
θ_3
Joint 1
Joint 3
Link 0
Active Joints

Mécanisme Stewart robot parallèle

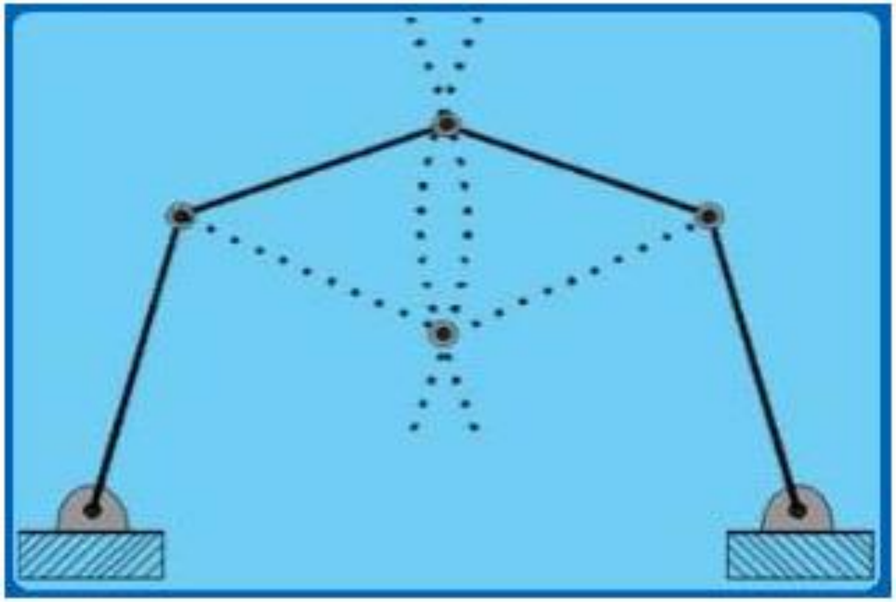


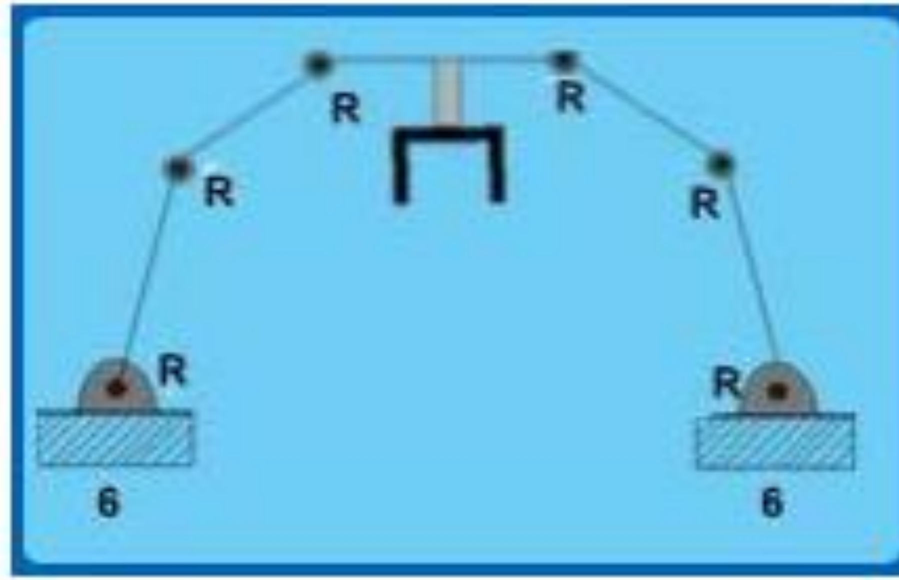
Précision et répétabilité



Les deux mauvaises **Bonne Répétabilité** **Les deux sont bonnes**

1985
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila





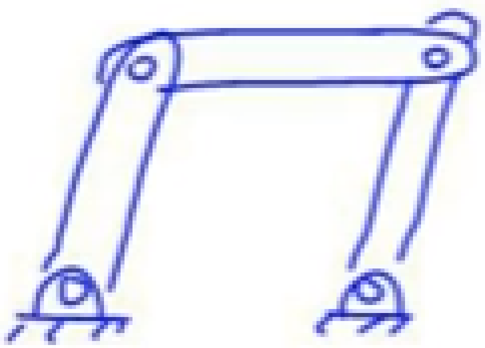
Pour trouver le degré de liberté d'un robot a chaîne fermée , la formule de Grubler pour les ou un ensemble donné de n liens est appliquée.

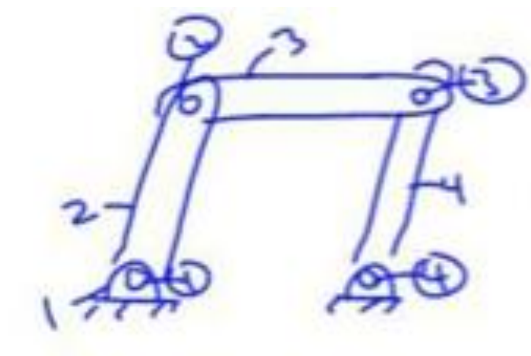
Jr- nombre d'articulations rotoïdes

Jp – nombre d'articulations prismatiques

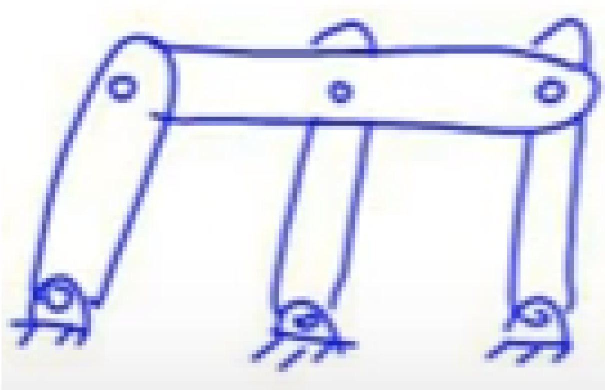
La formule de Grublers stipule que DOF=3(n-1)-2Jr-2Jp

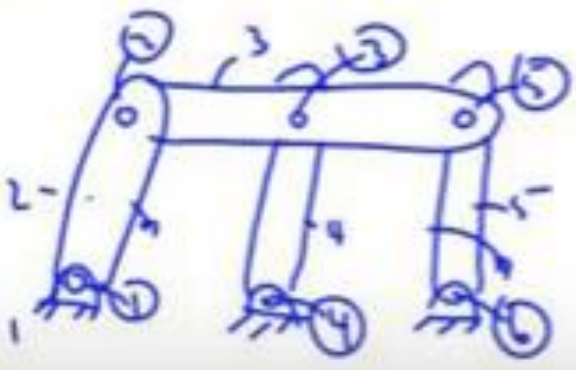
Pour le mécanisme ci-dessus de 5R; DOF=3(5-1)-2x5=2



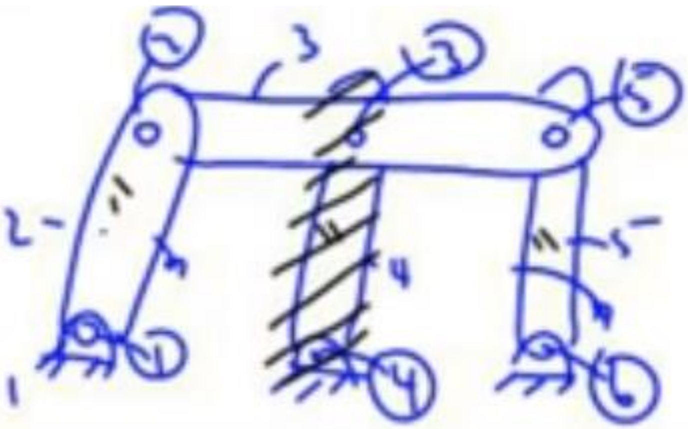


$$M = 3(4-1) - 2(4) - 0$$
$$= 1$$





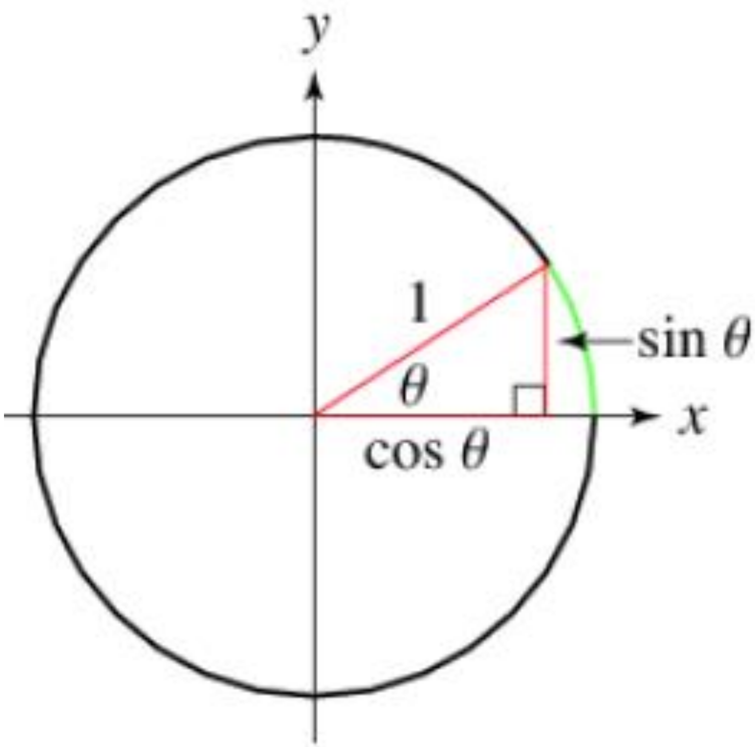
$$M = 3(5-1) - 2(6) - 0$$
$$= 0$$

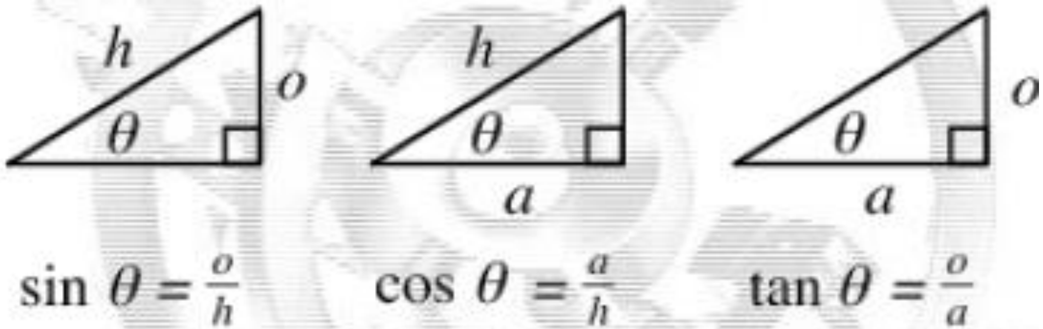


$$M = 3(5-1) - 2(6) - 0$$
$$= 0$$

$$M = 3(4-1) - 2(4) - 0$$
$$= 1$$

Trigonométrie, notions de base





جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Trigonométrie, notions de base

$$cos(a+b)=cos(a)cos(b)-sin(a)sin(b)$$

$$cos(a-b)=cos(a)cos(b)+sin(a)sin(b)$$

$$sin(a+b)=sin(a)cos(b)+sin(b)cos(a)$$

$$sin(a-b)=sin(a)cos(b)-sin(b)cos(a)$$

$$cos^2(x)+sin^2(x)=1$$

$$sin(2a)=2sin(a)cos(a)$$

$$cos(2a)=cos^2(a)-sin^2(a)$$

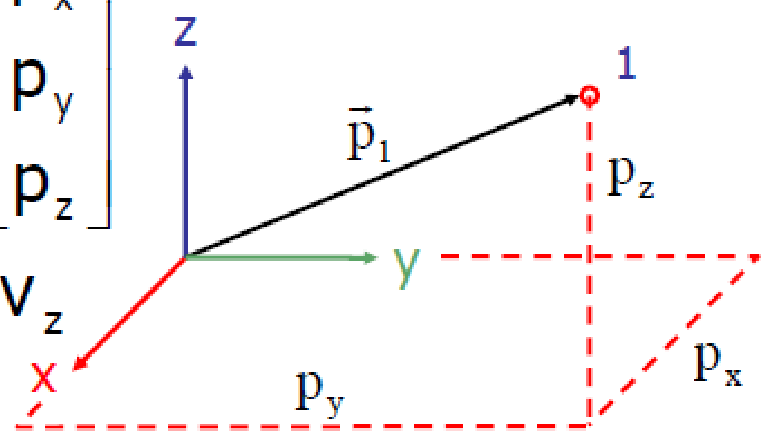
$$cos(2a)=2cos^2(a)-1$$

$$cos(2a)=1-2sin^2(a)$$

1985
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Analyse vectorielle

$$\vec{p}_1 = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$



$$\vec{p} \cdot \vec{v} = p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z$$

DotProd

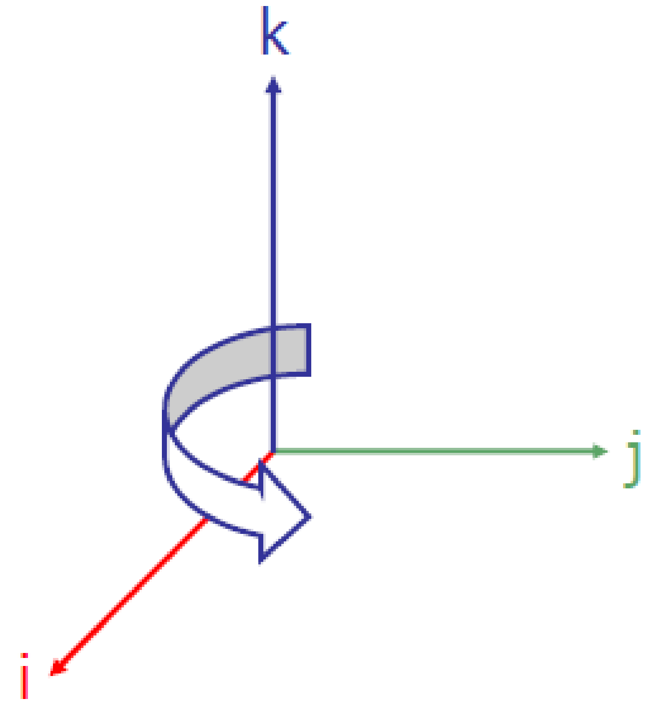
$$\vec{p} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p_x & p_y & p_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} p_y v_z - p_z v_y \\ p_z v_x - p_x v_z \\ p_x v_y - p_y v_x \end{bmatrix}$$

produit vectoriel

Faire le produit vectoriel de $\vec{i}$ par $\vec{j}$.

Solution :

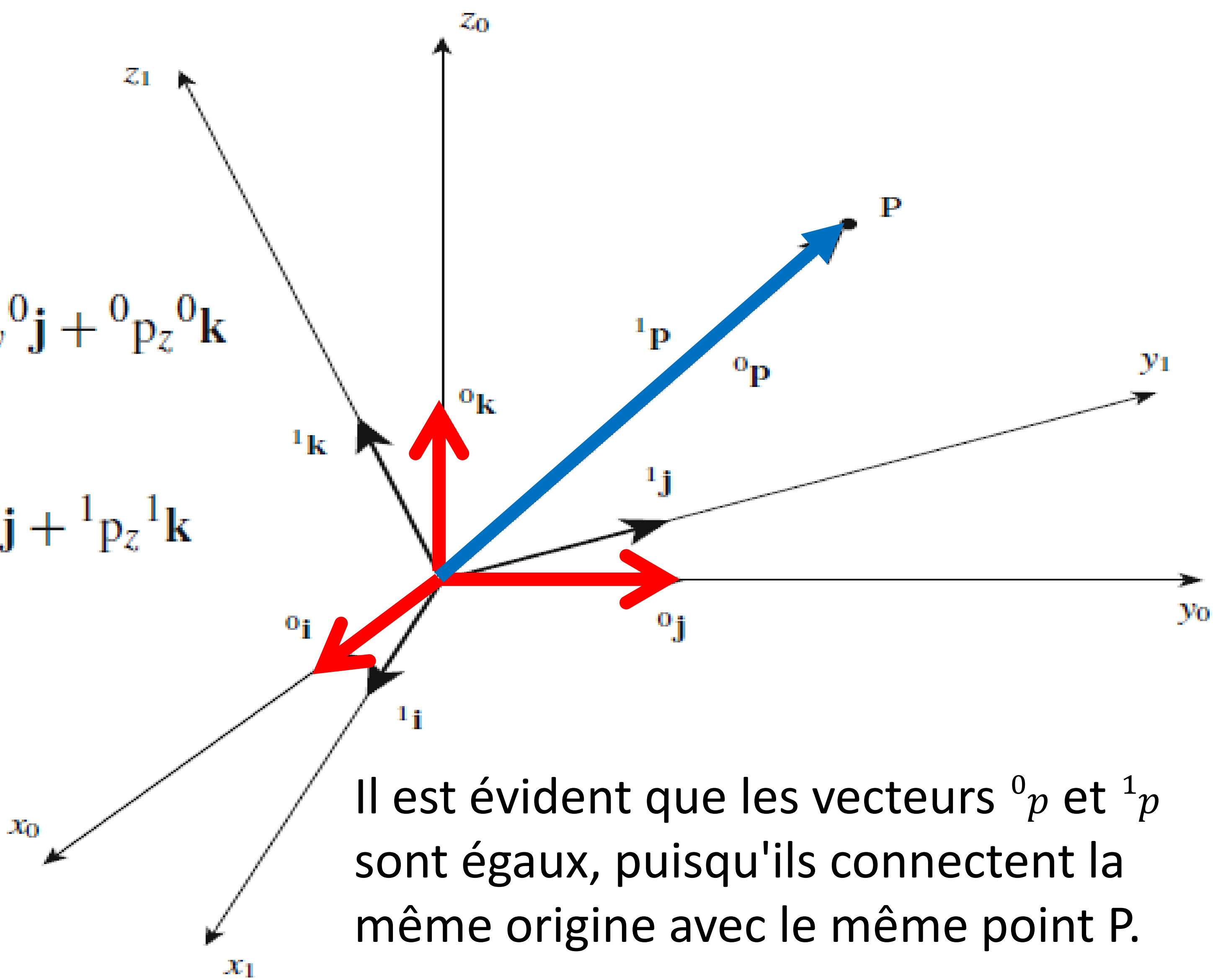
$$\vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{k}$$



Rotation d'un system de coordonnées x_1, y_1, z_1 par rapport à la coordonnée de référence x_0, y_0, z_0

$$^{0}\mathbf{p} = {}^{0}p_x\,{}^{0}\mathbf{i} + {}^{0}p_y\,{}^{0}\mathbf{j} + {}^{0}p_z\,{}^{0}\mathbf{k}$$

$$^{1}\mathbf{p} = {}^{1}p_x\,{}^{1}\mathbf{i} + {}^{1}p_y\,{}^{1}\mathbf{j} + {}^{1}p_z\,{}^{1}\mathbf{k}$$



Il est évident que les vecteurs ^{0}p et ^{1}p sont égaux, puisqu'ils connectent la même origine avec le même point P.

1985

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

$$ {}^0p_x = {}^0\mathbf{p}\,{}^0\mathbf{i} = {}^1\mathbf{p}\,{}^0\mathbf{i} = {}^1p_x\,{}^1\mathbf{i}\,{}^0\mathbf{i} + {}^1p_y\,{}^1\mathbf{j}\,{}^0\mathbf{i} + {}^1p_z\,{}^1\mathbf{k}\,{}^0\mathbf{i} $$

$$ {}^0p_y = {}^1p_x\,{}^1\mathbf{i}\,{}^0\mathbf{j} + {}^1p_y\,{}^1\mathbf{j}\,{}^0\mathbf{j} + {}^1p_z\,{}^1\mathbf{k}\,{}^0\mathbf{j} $$
$$ {}^0p_z = {}^1p_x\,{}^1\mathbf{i}\,{}^0\mathbf{k} + {}^1p_y\,{}^1\mathbf{j}\,{}^0\mathbf{k} + {}^1p_z\,{}^1\mathbf{k}\,{}^0\mathbf{k} $$

$$ {}^0\mathbf{p} = {}^0\mathbf{R}_1\,{}^1\mathbf{p} $$

$$ {}^0\mathbf{p} = [{}^0p_x, {}^0p_y, {}^0p_z]^T $$

$$ {}^1\mathbf{p} = [{}^1p_x, {}^1p_y, {}^1p_z]^T $$

$$ {}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{i}\,{}^0\mathbf{i} & {}^1\mathbf{j}\,{}^0\mathbf{i} & {}^1\mathbf{k}\,{}^0\mathbf{i} \\ {}^1\mathbf{i}\,{}^0\mathbf{j} & {}^1\mathbf{j}\,{}^0\mathbf{j} & {}^1\mathbf{k}\,{}^0\mathbf{j} \\ {}^1\mathbf{i}\,{}^0\mathbf{k} & {}^1\mathbf{j}\,{}^0\mathbf{k} & {}^1\mathbf{k}\,{}^0\mathbf{k} \end{bmatrix} $$

$$ {}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_{1_i 0_i} & \cos\vartheta_{1_j 0_i} & \cos\vartheta_{1_k 0_i} \\ \cos\vartheta_{1_i 0_j} & \cos\vartheta_{1_j 0_j} & \cos\vartheta_{1_k 0_j} \\ \cos\vartheta_{1_i 0_k} & \cos\vartheta_{1_j 0_k} & \cos\vartheta_{1_k 0_k} \end{bmatrix} $$

$$ {}^1p_x = {}^1\mathbf{p}\,{}^1\mathbf{i} = {}^0\mathbf{p}\,{}^1\mathbf{i} = {}^0p_x\,{}^0\mathbf{i}\,{}^1\mathbf{i} + {}^0p_y\,{}^0\mathbf{j}\,{}^1\mathbf{i} + {}^0p_z\,{}^0\mathbf{k}\,{}^1\mathbf{i} $$

$$ {}^1\mathbf{p} = {}^1\mathbf{R}_0\,{}^0\mathbf{p} $$

$$ {}^1\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{i}\,{}^1\mathbf{i} & {}^0\mathbf{j}\,{}^1\mathbf{i} & {}^0\mathbf{k}\,{}^1\mathbf{i} \\ {}^0\mathbf{i}\,{}^1\mathbf{j} & {}^0\mathbf{j}\,{}^1\mathbf{j} & {}^0\mathbf{k}\,{}^1\mathbf{j} \\ {}^0\mathbf{i}\,{}^1\mathbf{k} & {}^0\mathbf{j}\,{}^1\mathbf{k} & {}^0\mathbf{k}\,{}^1\mathbf{k} \end{bmatrix} $$

1985
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Deux systèmes de coordonnées tournés autour de l'axe x0

$$^0\mathbf{i}\,^1\mathbf{i} = 1$$

$$^0\mathbf{j}\,^1\mathbf{j} = \cos\vartheta$$

$$^0\mathbf{k}\,^1\mathbf{k} = \cos\vartheta$$

$$^0\mathbf{j}\,^1\mathbf{k} = -\sin\vartheta$$

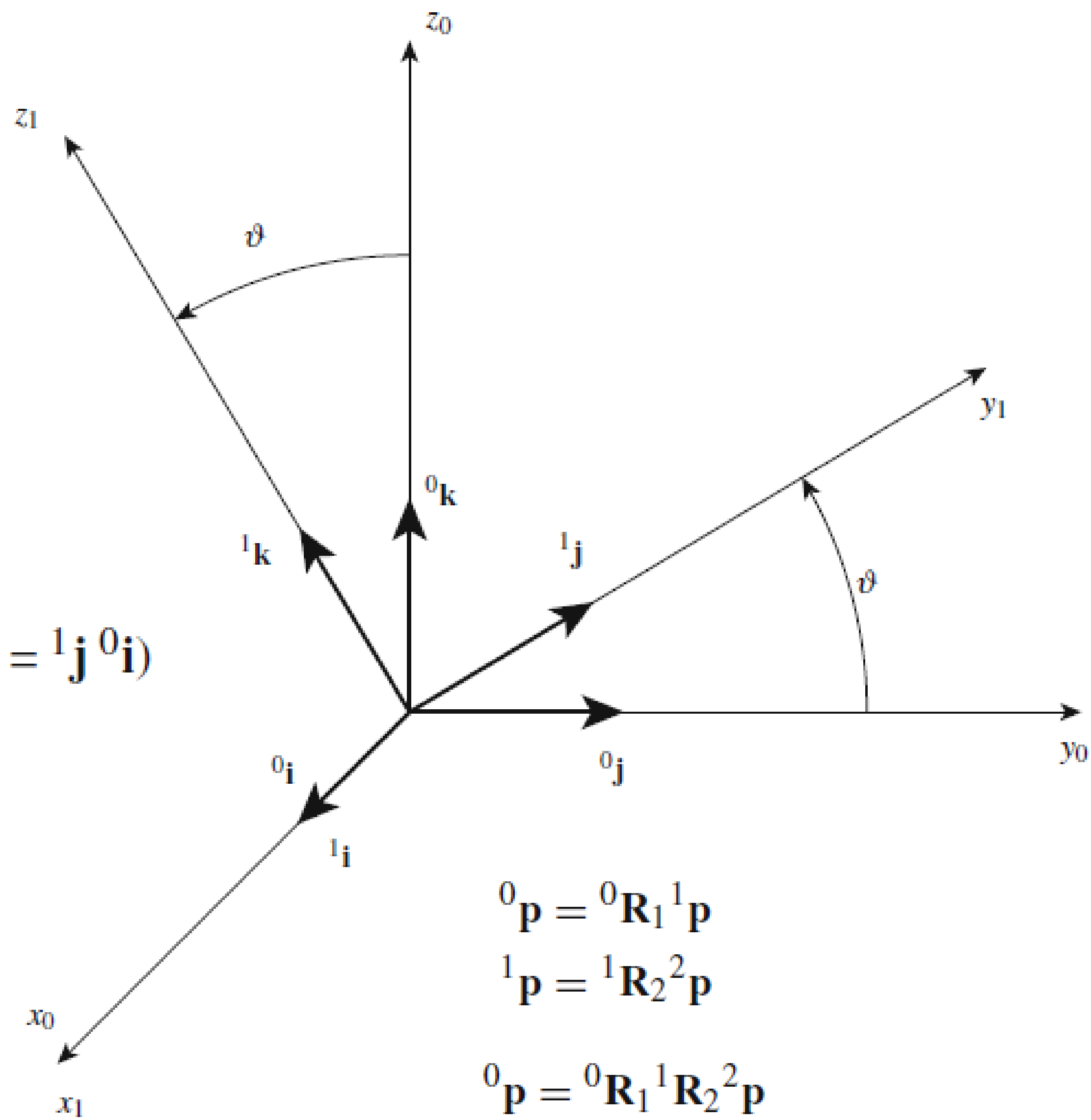
$$^0\mathbf{k}\,^1\mathbf{j} = \sin\vartheta$$

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\vartheta & -s\vartheta \\ 0 & s\vartheta & c\vartheta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} c\vartheta & 0 & s\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\vartheta & 0 & c\vartheta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} c\vartheta & -s\vartheta & 0 \\ s\vartheta & c\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(e.g. $^0\mathbf{i}\,^1\mathbf{j} = {}^1\mathbf{j}\,^0\mathbf{i}$)



$$^0\mathbf{p} = {}^0\mathbf{R}_1\,^1\mathbf{p}$$

$$^1\mathbf{p} = {}^1\mathbf{R}_2\,^2\mathbf{p}$$

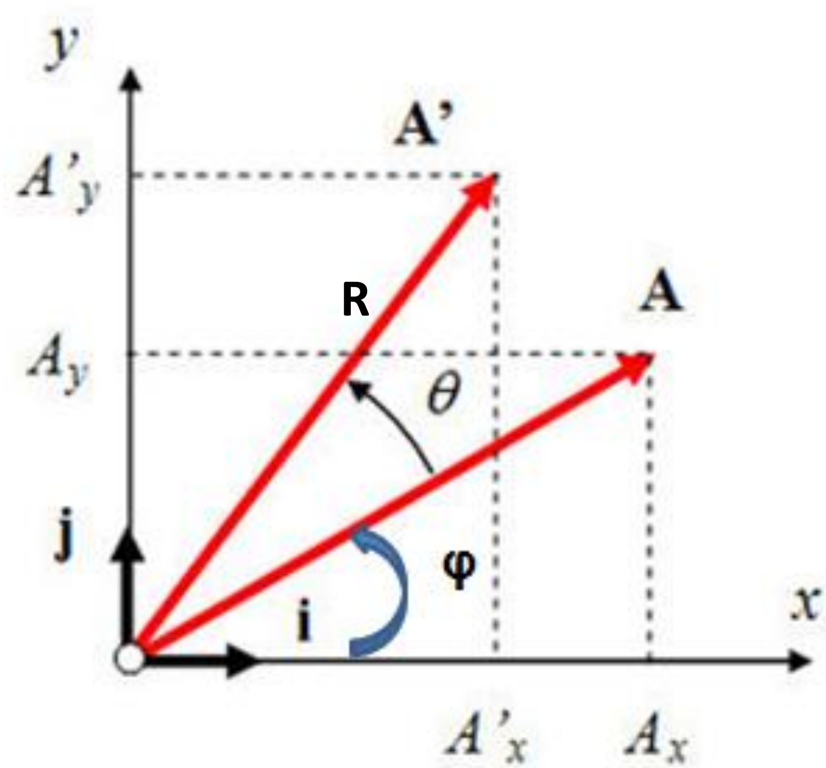
$$^0\mathbf{p} = {}^0\mathbf{R}_1\,^1\mathbf{R}_2\,^2\mathbf{p}$$

$$^0\mathbf{R}_2 = {}^0\mathbf{R}_1\,^1\mathbf{R}_2$$

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{x,90}\mathbf{R}_{y,180}\mathbf{R}_{z,270}$$

Matrice de rotation

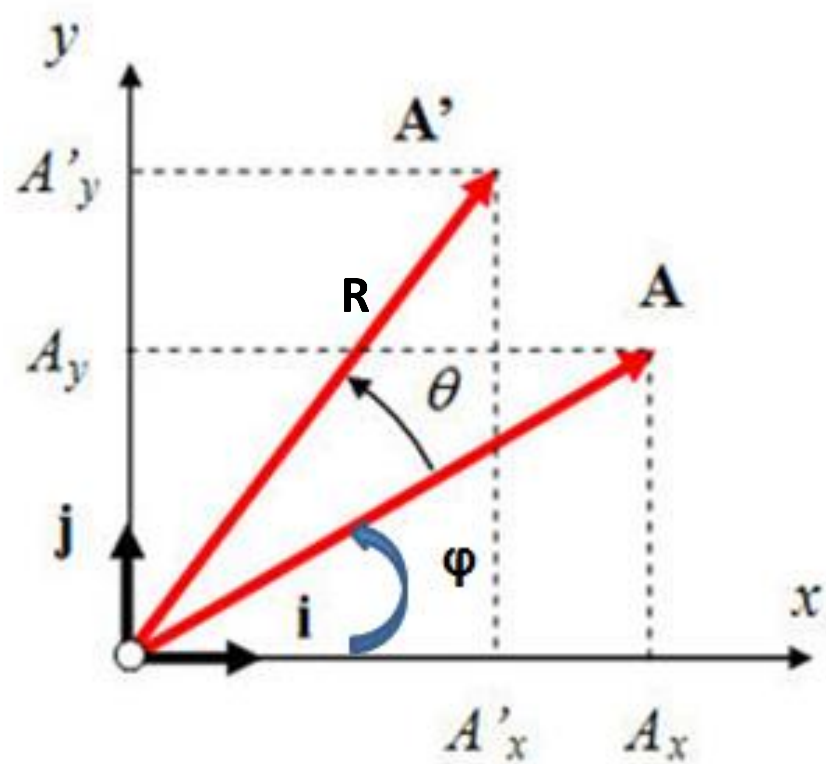
$A'x = Ax * \cos(\theta) - Ay * \sin(\theta)$

$A'y = Ax * \sin(\theta) + Ay * \cos(\theta)$

$Z' = Z$

$\overrightarrow{OA}$ à l'aide de la matrice de rotation :

$$\begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$



Dans un espace euclidien à 3 dimensions, les matrices de rotations suivantes correspondent à des rotations autour des axes *x*, *y* et *z* (respectivement) :

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}..$$

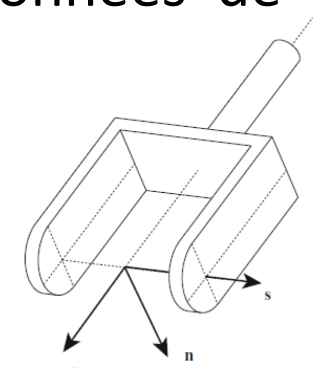
Les rotations opèrent ainsi : R_x tourne l'axe *y* vers l'axe *z*, R_y tourne l'axe *z* vers l'axe *x* et R_z tourne l'axe *x* vers l'axe *y*.

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{x,90}\mathbf{R}_{y,180}\mathbf{R}_{z,270}$$

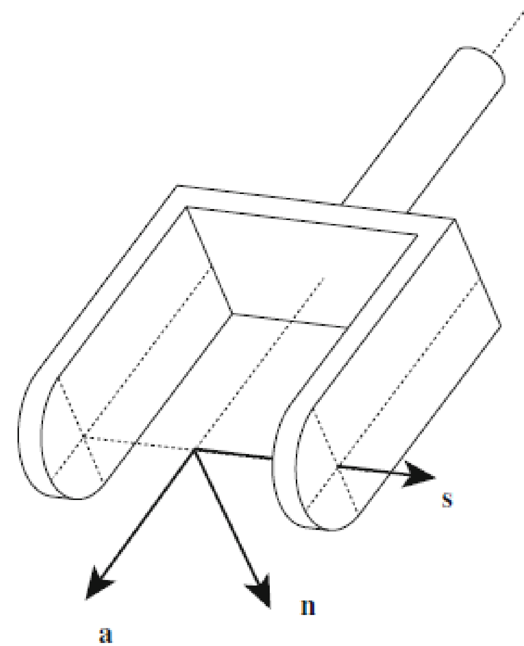
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En robotique la notion d'orientation est principalement liée à l'orientation de la pince du robot. Un système de coordonnées avec trois vecteurs unitaires n, s et a, décrivant l'orientation de la pince, est placé entre les deux doigts de l’organe terminale (pince).

- Le vecteur de l'axe z s'étend dans la direction de l'approche de la pince vers l'objet. Il est désigné par le vecteur a (approche).
- Le vecteur, qui est aligné avec l'axe y, décrit la direction de glissement des doigts et est noté s (glissière).
- Le troisième vecteur complète le système de coordonnées de la main droite et est appelé normal.

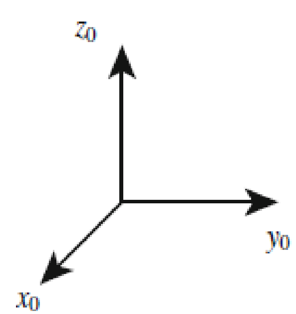


La matrice décrivant l'orientation de la pince par rapport au référentiel x_0, y_0, z_0 a la forme suivante:



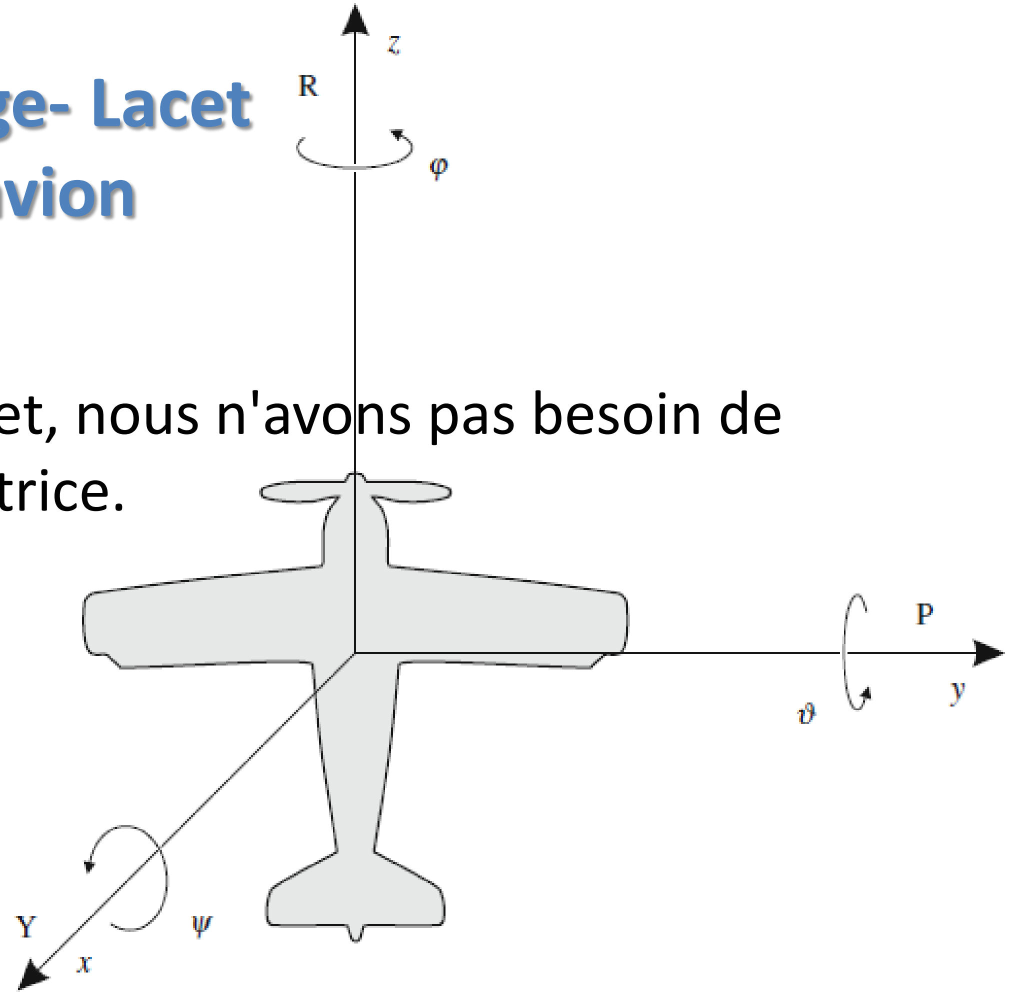
$$\mathbf{n} = \mathbf{s} \times \mathbf{a}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix}$$



L'élément n_x de la matrice désigne la projection du vecteur unitaire n sur le x_0 axe du système de référence.

Angles Roulis- Tangage- Lacet pour le cas d'un avion



Pour décrire l'orientation d'un objet, nous n'avons pas besoin de définir les neuf éléments de la matrice.

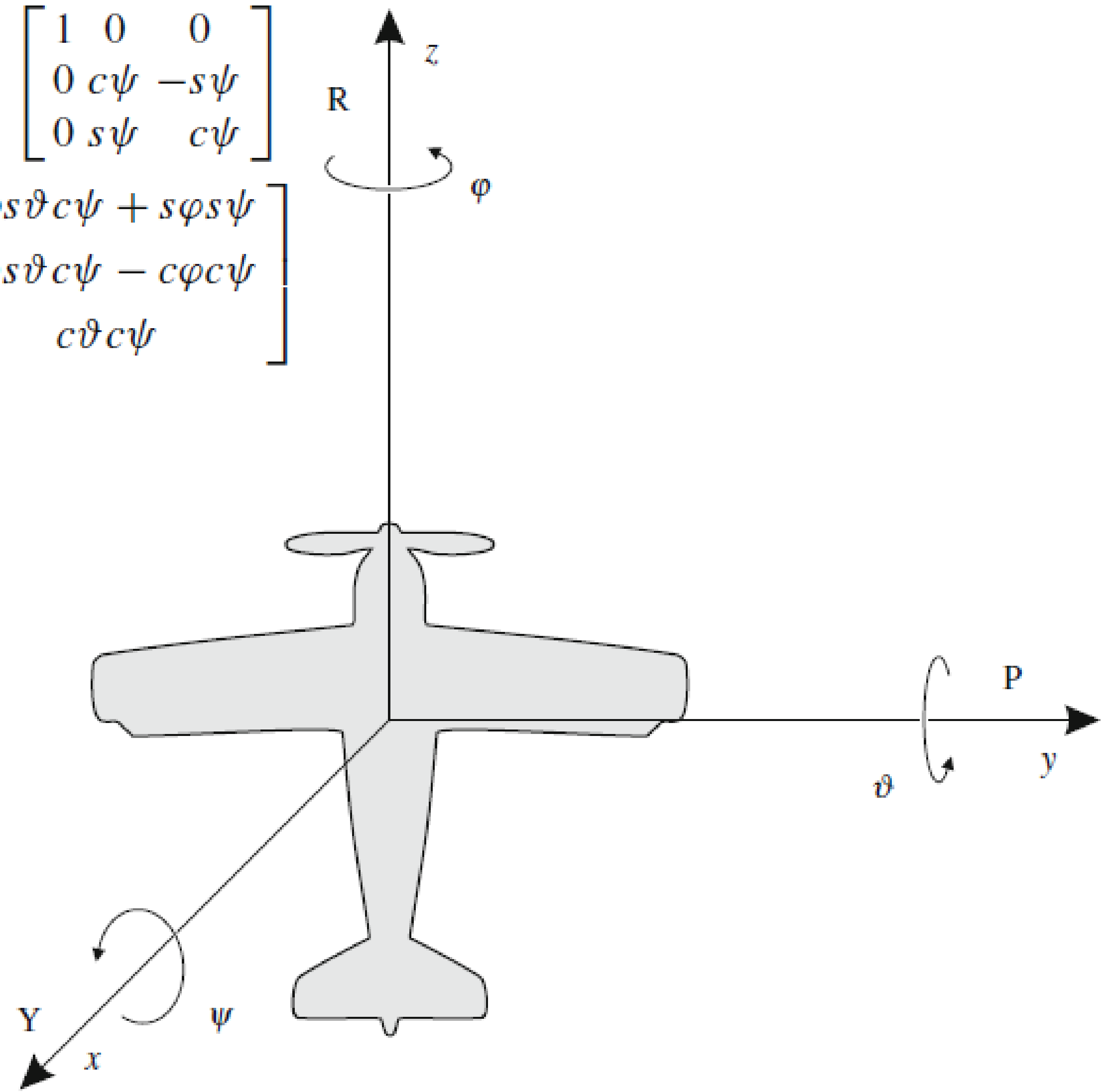
$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = 1$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1$$
$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{a} = 0$$

Trois éléments sont donc suffisants pour décrire l'orientation. L'orientation est souvent décrite par la séquence de rotations suivante:

R : Roulis (Roll)— sur l'axe z
P : Tangage (Pitch)—sur l'axe y
Y : Lacet (Yaw)—sur l'axe x

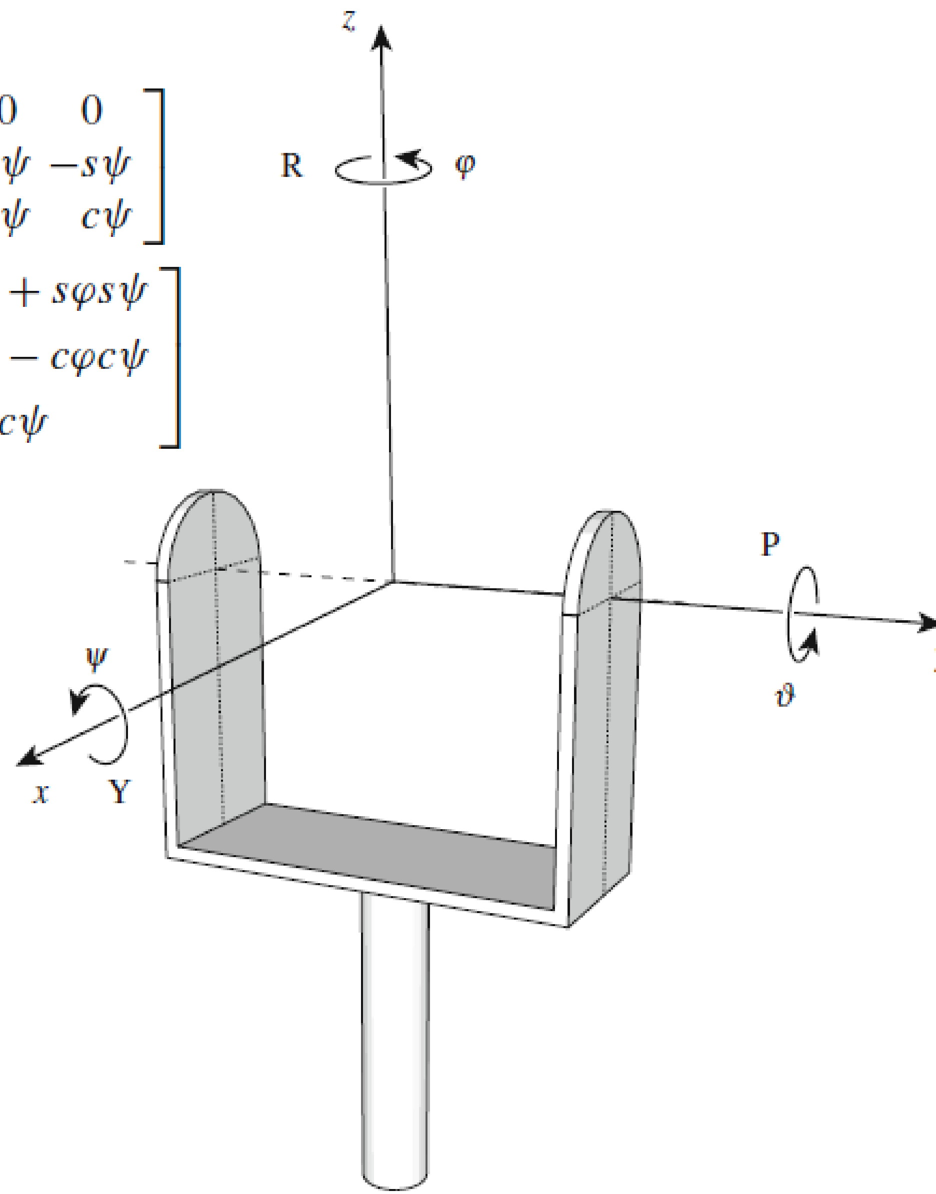
Angles Roulis- Tangage- Lacet pour le cas d'un avion

$$\begin{aligned}
\mathbf{RPY}(\varphi,\vartheta,\psi) &= Rot(z,\varphi)Rot(y,\vartheta)Rot(x,\psi)\\
&= \begin{bmatrix} c\varphi & -s\varphi & 0\\ s\varphi & c\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\vartheta & 0 & s\vartheta\\ 0 & 1 & 0\\ -s\vartheta & 0 & c\vartheta\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & c\psi & -s\psi\\ 0 & s\psi & c\psi\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} c\varphi c\vartheta & c\varphi s\vartheta s\psi - s\varphi c\psi & c\varphi s\vartheta c\psi + s\varphi s\psi\\ s\varphi s\vartheta & s\varphi s\vartheta s\psi + c\varphi c\psi & s\varphi s\vartheta c\psi - c\varphi c\psi\\ -s\vartheta & c\vartheta s\psi & c\vartheta c\psi\end{bmatrix}
\end{aligned}$$



Les angles Roulis- Tangage- Lacet pour le cas (RPY) pour le cas d'une pince robotisée

$$
\begin{aligned}
\mathbf{RPY}(\varphi, \vartheta, \psi) &= Rot(z, \varphi)Rot(y, \vartheta)Rot(x, \psi) \\
&= \begin{bmatrix} c\varphi & -s\varphi & 0 \\ s\varphi & c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\vartheta & 0 & s\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\vartheta & 0 & c\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\psi & -s\psi \\ 0 & s\psi & c\psi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c\varphi c\vartheta & c\varphi s\vartheta s\psi - s\varphi c\psi & c\varphi s\vartheta c\psi + s\varphi s\psi \\ s\varphi s\vartheta & s\varphi s\vartheta s\psi + c\varphi c\psi & s\varphi s\vartheta c\psi - c\varphi c\psi \\ -s\vartheta & c\vartheta s\psi & c\vartheta c\psi \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$



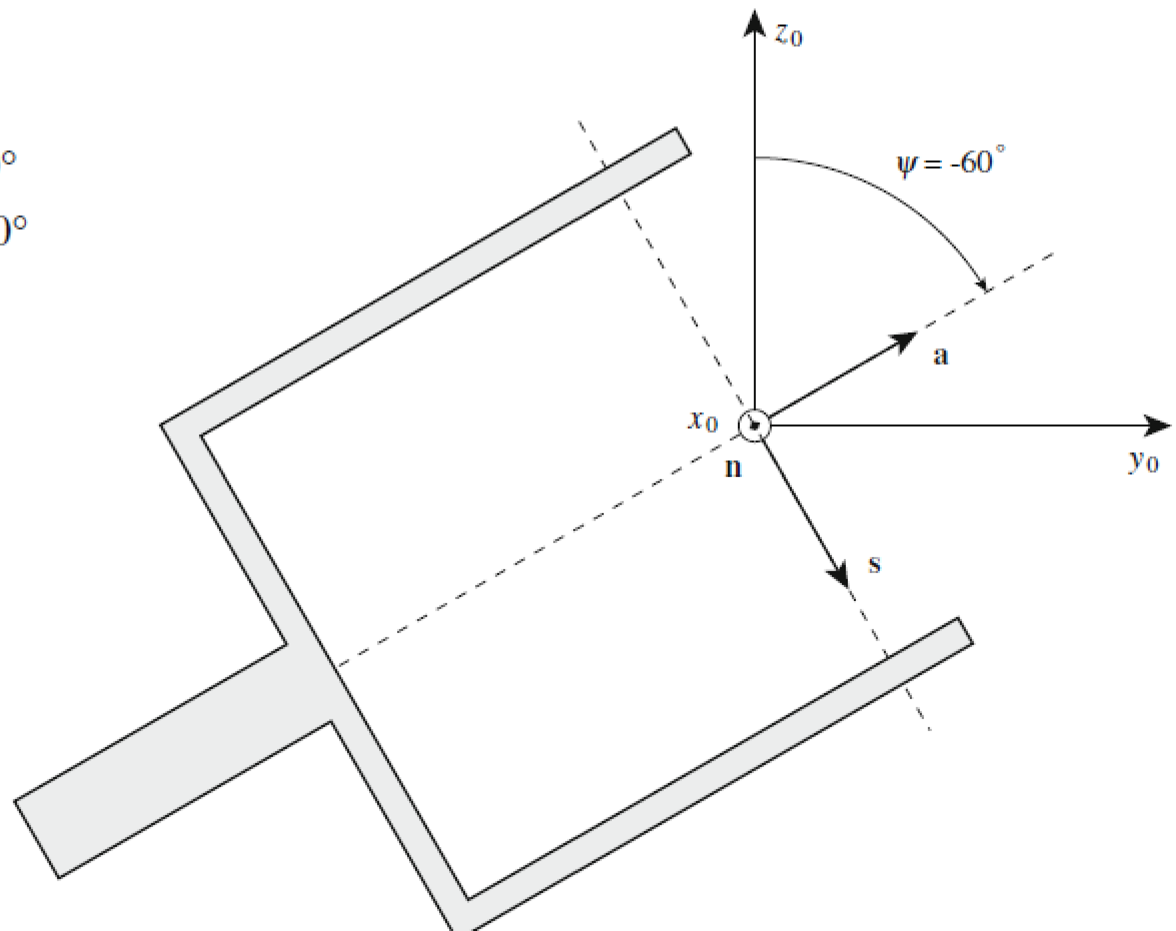
Orientation de la pince du robot

La pince reste dans le plan y0, z0.
De la figure, nous pouvons lire les angles entre les axes du référentiel et le système de coordonné de préhension (pince):

$$n_x = \cos 0°,\ s_x = \cos 90°,\ a_x = \cos 90°$$
$$n_y = \cos 90°,\ s_y = \cos 60°,\ a_y = \cos 30°$$
$$n_z = \cos 90°,\ s_z = \cos 150°,\ a_z = \cos 60°$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.866 \\ 0 & -0.866 & 0.5 \end{bmatrix}$$



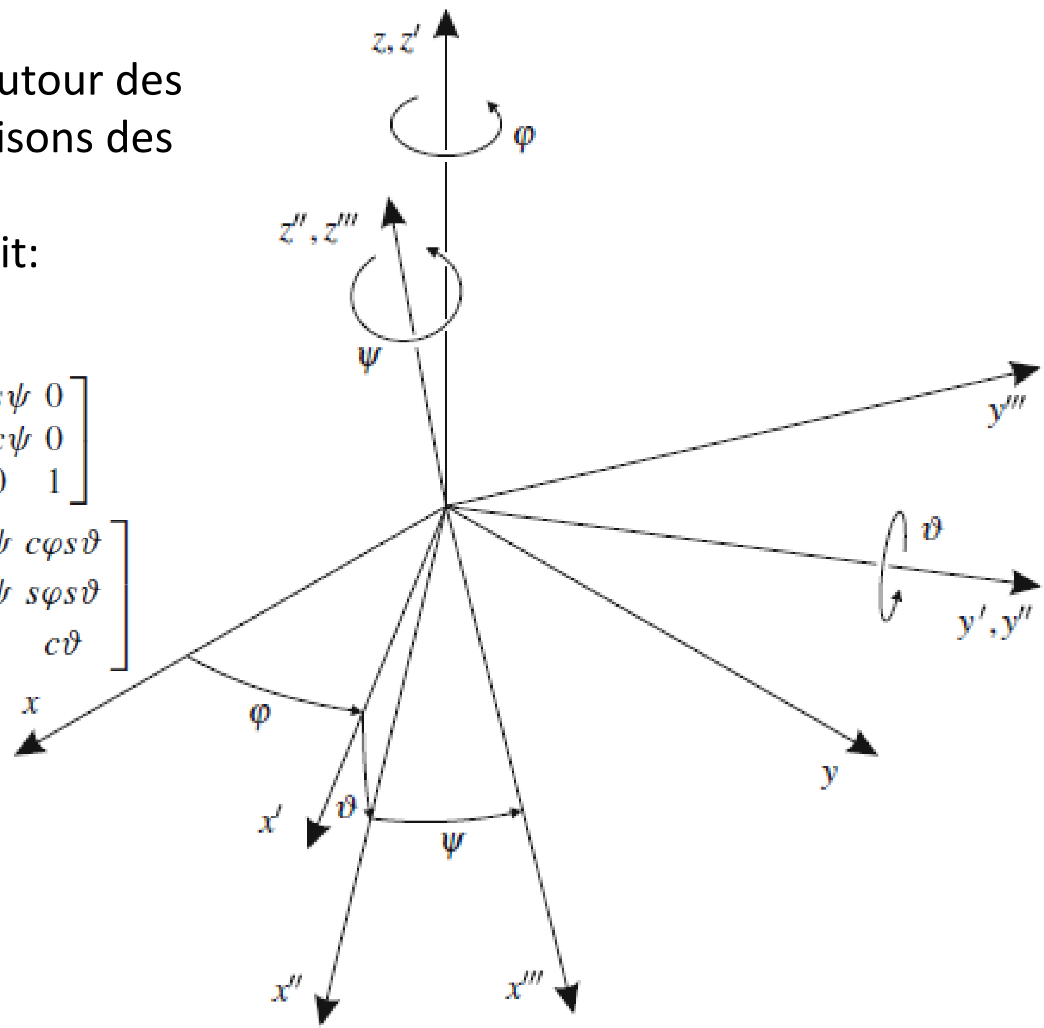
1985
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Angles d'Euler

L'orientation peut être décrite aussi à l'aide des angles d'Euler, où nous effectuions d'abord la rotation φ autour de l'axe z, ensuite la rotation ϑ autour du nouveau axe y et enfin la rotation ψ autour de l'axe momentané z

Comme les rotations ont été effectuées autour des axes du référentiel momentané, nous utilisons des post-multiplications.
La matrice d'Euler est obtenue comme suit:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Euler}(\varphi, \vartheta, \psi) &= Rot(z, \varphi)Rot(y', \vartheta)Rot(z'', \psi) \\
&= \begin{bmatrix} c\varphi & -s\varphi & 0 \\ s\varphi & c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\vartheta & 0 & s\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\vartheta & 0 & c\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c\varphi c\vartheta c\psi - s\varphi s\psi & -c\varphi c\vartheta s\psi - s\varphi c\psi & c\varphi s\vartheta \\ s\varphi c\vartheta c\psi + c\varphi s\psi & -s\varphi c\vartheta s\psi + c\varphi c\psi & s\varphi s\vartheta \\ -s\vartheta c\psi & s\vartheta s\psi & c\vartheta \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$



L'orientation décrite par cette matrice est appelée aussi angles d'Euler Z-Y-Z.

1985

جامعة محمد بوضياف - المسيلة

Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Angles d'Euler

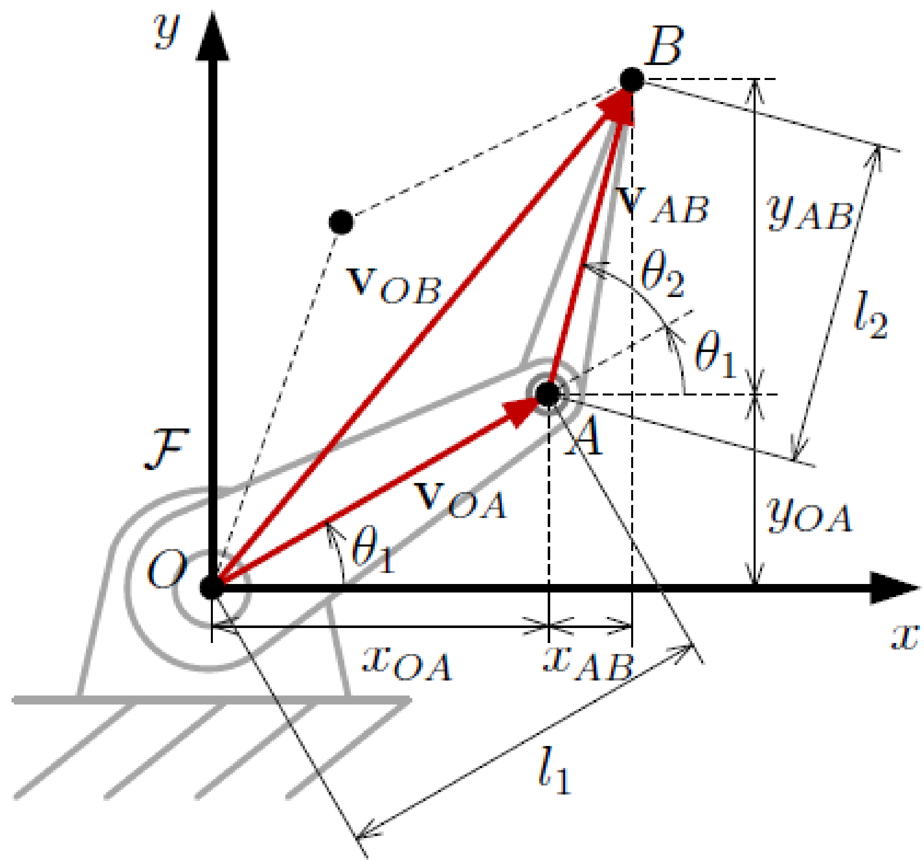
Le théorème d'Euler dit que deux systèmes de coordonnées orthonormés indépendants peuvent être alignées les unes aux autres par une séquence de trois rotations autour des axes de coordonnées, où deux rotations consécutives ne peuvent pas être faites autour du même axe.

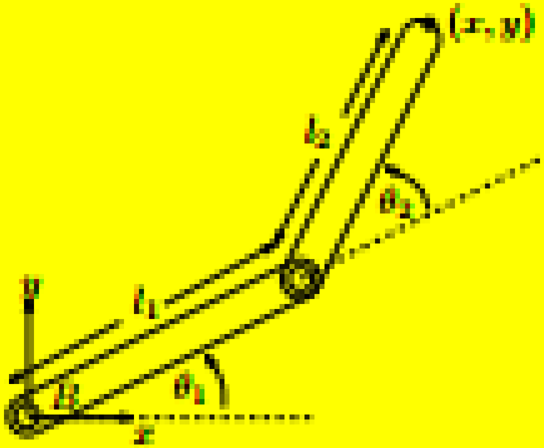
12 rotations différentes sont possibles:

X-Y-Z, X-Z-Y, X-Y-X, X-Z-X, Y-Z-X, Y-X-Z, Y-Z-Y, Y-X-Y, Z-X-Y, Z-Y-X, Z-X-Z*, and *Z-Y-Z.

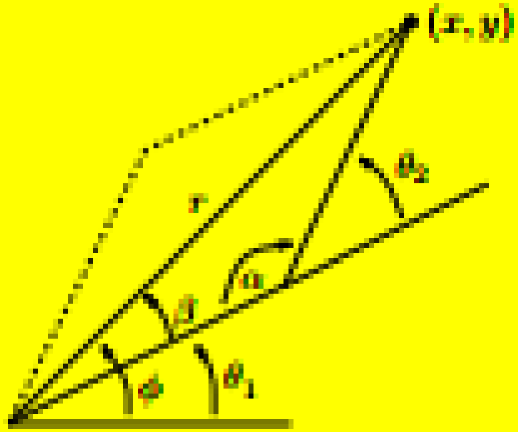
Trigonométrie, notions de base

Soit le référentiel F (avec origine O et axes x et y) et les vecteurs V_{OA} et V_{AB} qui servent a modéliser un robot sériel plan a 2 ddl, tel qu'illustre à la figure suivante.





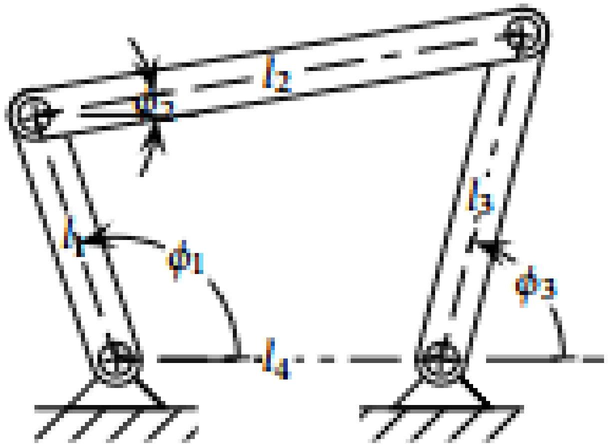
(a)



(b)

$$x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$
$$y = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Given (x, y), solve for (θ_1, θ_2)



$$l_1 \cos\phi_1 + l_2 \cos\phi_2 - l_3 \cos\phi_3 - l_4 = 0$$

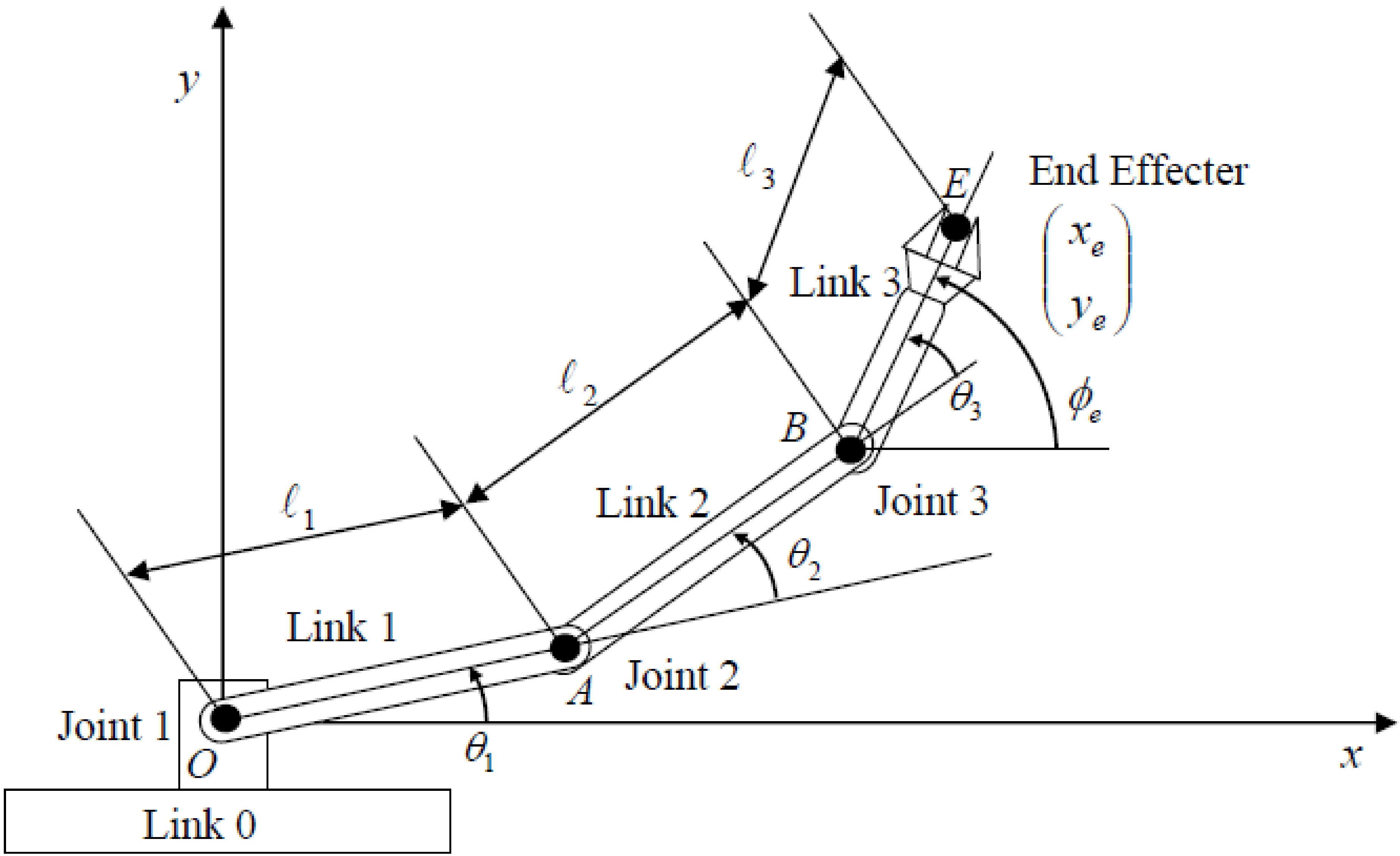
$$l_1 \sin\phi_1 + l_2 \sin\phi_2 - l_3 \sin\phi_3 = 0$$

$$Q = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -l_1 \sin\phi_1 & -l_2 \sin\phi_2 & l_3 \sin\phi_3 \\ l_1 \cos\phi_1 & l_2 \cos\phi_2 & -l_3 \cos\phi_3 \end{bmatrix}}_{J(\theta)} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$J(\phi) \text{ drop rank!} \begin{cases} \phi_1 - \phi_2 = \pi, \text{ or } 0 \\ \phi_2 - \phi_3 = \pi, \text{ or } 0 \\ \phi_1 - \phi_3 = \pi, \text{ or } 0 \end{cases}$$

Robot planar à trois degrés de liberté (trois articulations)



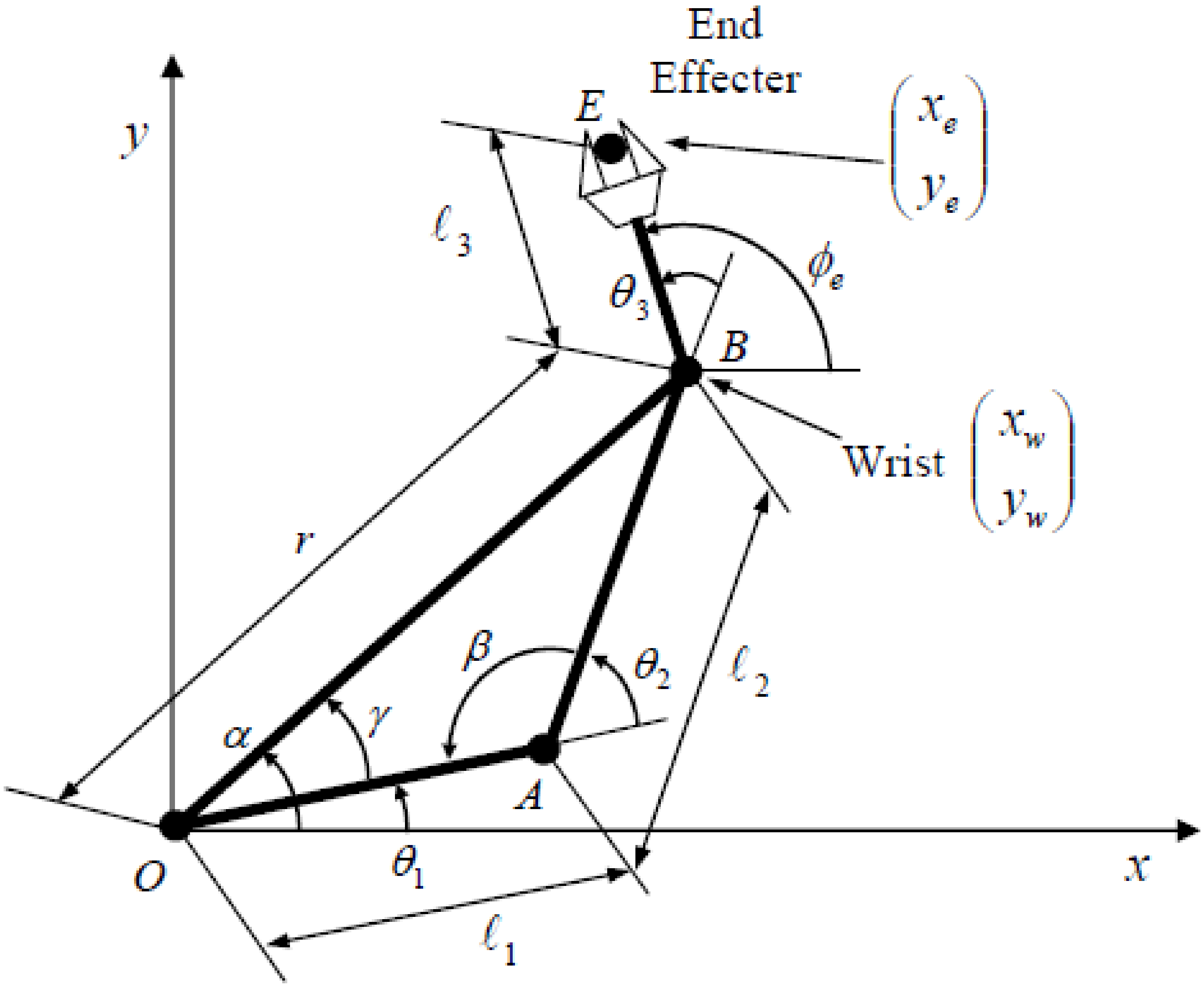
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

$$x_e = \ell_1 \cos\theta_1 + \ell_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \ell_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$y_e = \ell_1 \sin\theta_1 + \ell_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + \ell_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$\phi_e = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila



$$x_w = x_e - \ell_3 \cos \phi_e$$

$$y_w = y_e - \ell_3 \sin \phi_e$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{y_w}{x_w}$$

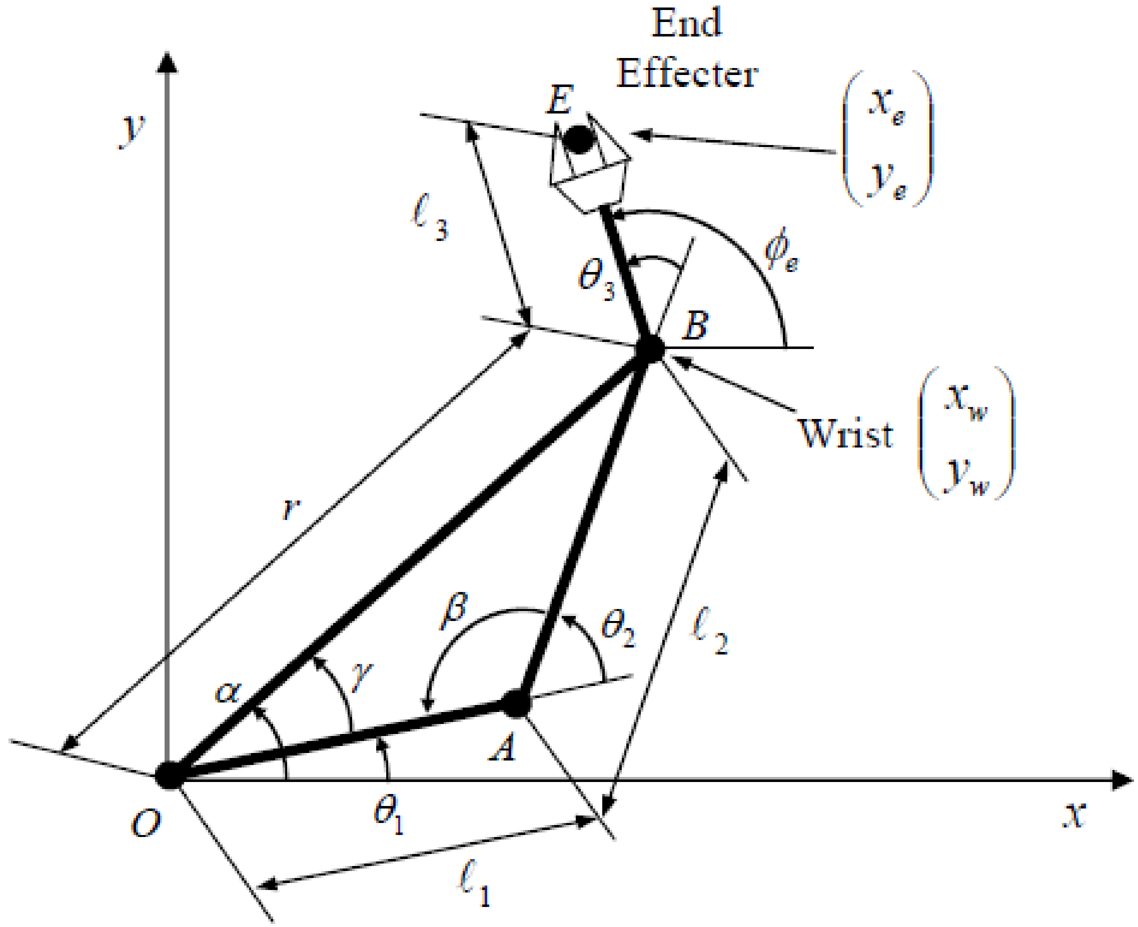
$$\ell_1^2 + \ell_2^2 - 2\ell_1\ell_2\cos\beta = r^2$$

$$r^2 = x_w^2 + y_w^2$$

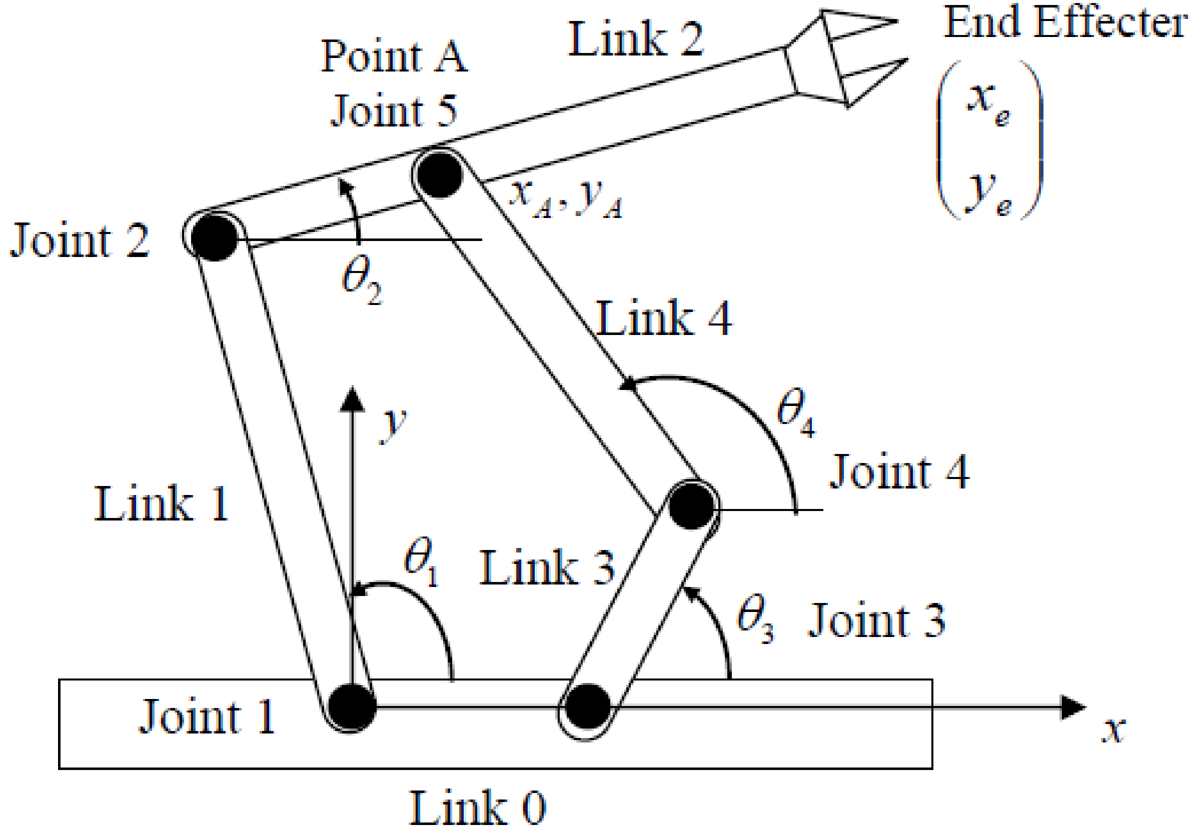
$$\theta_2 = \pi - \beta = \pi - \cos^{-1}\frac{\ell_1^2 + \ell_2^2 - x_w^2 - y_w^2}{2\ell_1\ell_2}$$

$$r^2 + \ell_1^2 - 2r\ell_1\cos\gamma = \ell_2^2$$

$$\theta_1 = \alpha - \gamma = \tan^{-1}\frac{y_w}{x_w} - \cos^{-1}\frac{x_w^2 + y_w^2 + \ell_1^2 - \ell_2^2}{2\ell_1\sqrt{x_w^2 + y_w^2}}$$



$$\theta_3 = \phi_e - \theta_1 - \theta_2$$



$$x_e = \ell_1 \cos\theta_1 + \ell_2 \cos\theta_2$$
$$y_e = \ell_1 \sin\theta_1 + \ell_2 \sin\theta_2$$

$$x_A = \ell_1 \cos\theta_1 + \ell_5 \cos\theta_2$$
$$y_A = \ell_1 \sin\theta_1 + \ell_5 \sin\theta_2$$

$$x_A = \ell_3 \cos\theta_3 + \ell_4 \cos\theta_4$$
$$y_A = \ell_3 \sin\theta_3 + \ell_4 \sin\theta_4$$

$$\ell_1 \cos\theta_1 + \ell_5 \cos\theta_2 = \ell_3 \cos\theta_3 + \ell_4 \cos\theta_4$$
$$\ell_1 \sin\theta_1 + \ell_5 \sin\theta_2 = \ell_3 \sin\theta_3 + \ell_4 \sin\theta_4$$

Note that there are four variables and two constraint equations. Therefore, two of the variables, such as θ_1, θ_3, are independent. It should also be noted that multiple solutions exist for these constraint equations.

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Although the forward kinematic equations are difficult to write out explicitly, the inverse kinematic equations can be obtained for this parallel link mechanism. The problem is to find θ_1, θ_3 that lead the endpoint to a desired position: x_e, y_e. We will take the following procedure:

Step 1 Given x_e, y_e, find θ_1, θ_2 by solving the two-link inverse kinematics problem.

Step 2 Given θ_1, θ_2, obtain x_A, y_A. This is a forward kinematics problem.

Step 3 Given x_A, y_A, find θ_3, θ_4 by solving another two-link inverse kinematics problem.

Université Mohamed Boudiaf - M'sila

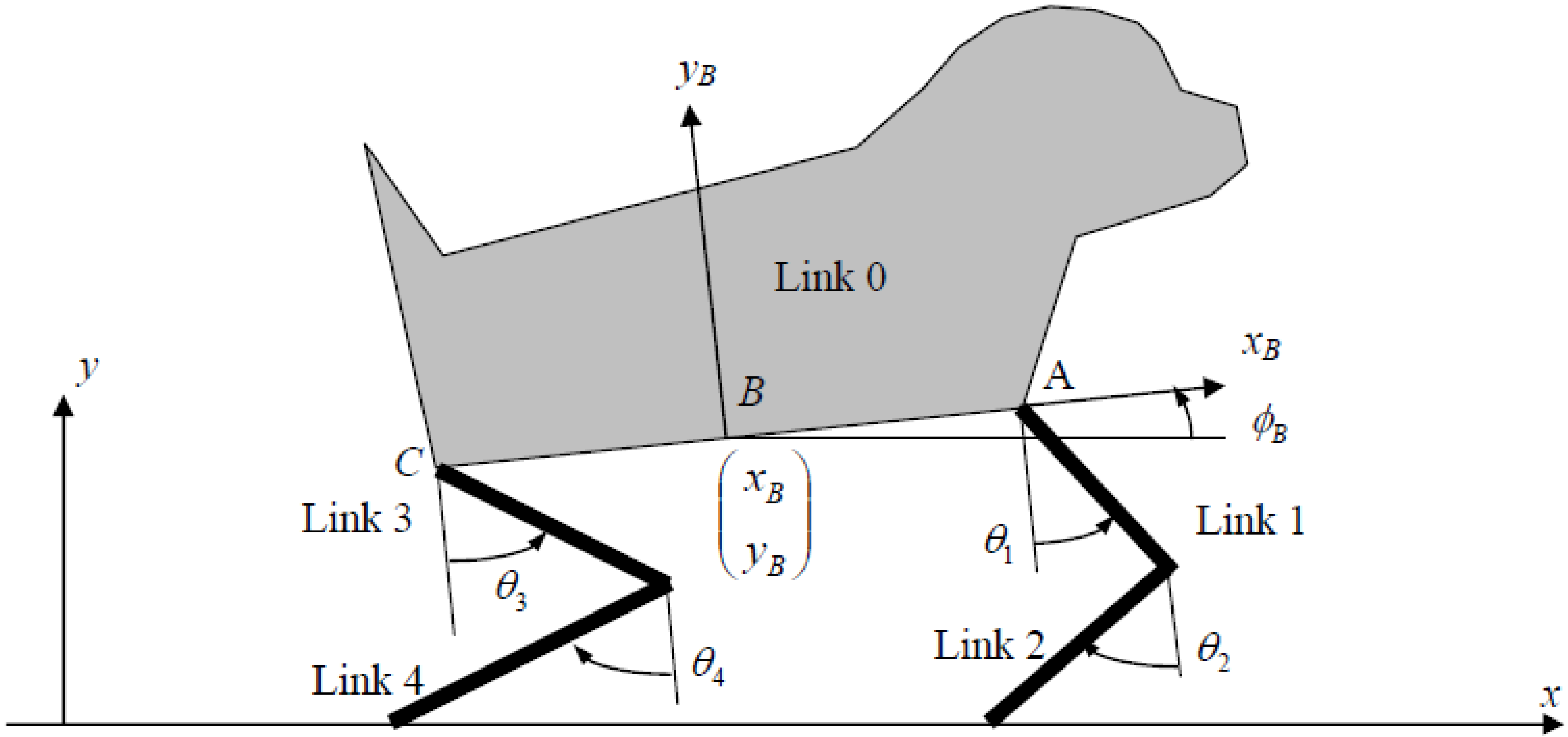


Figure 4.3.2 A doggy robot with two legs on the ground

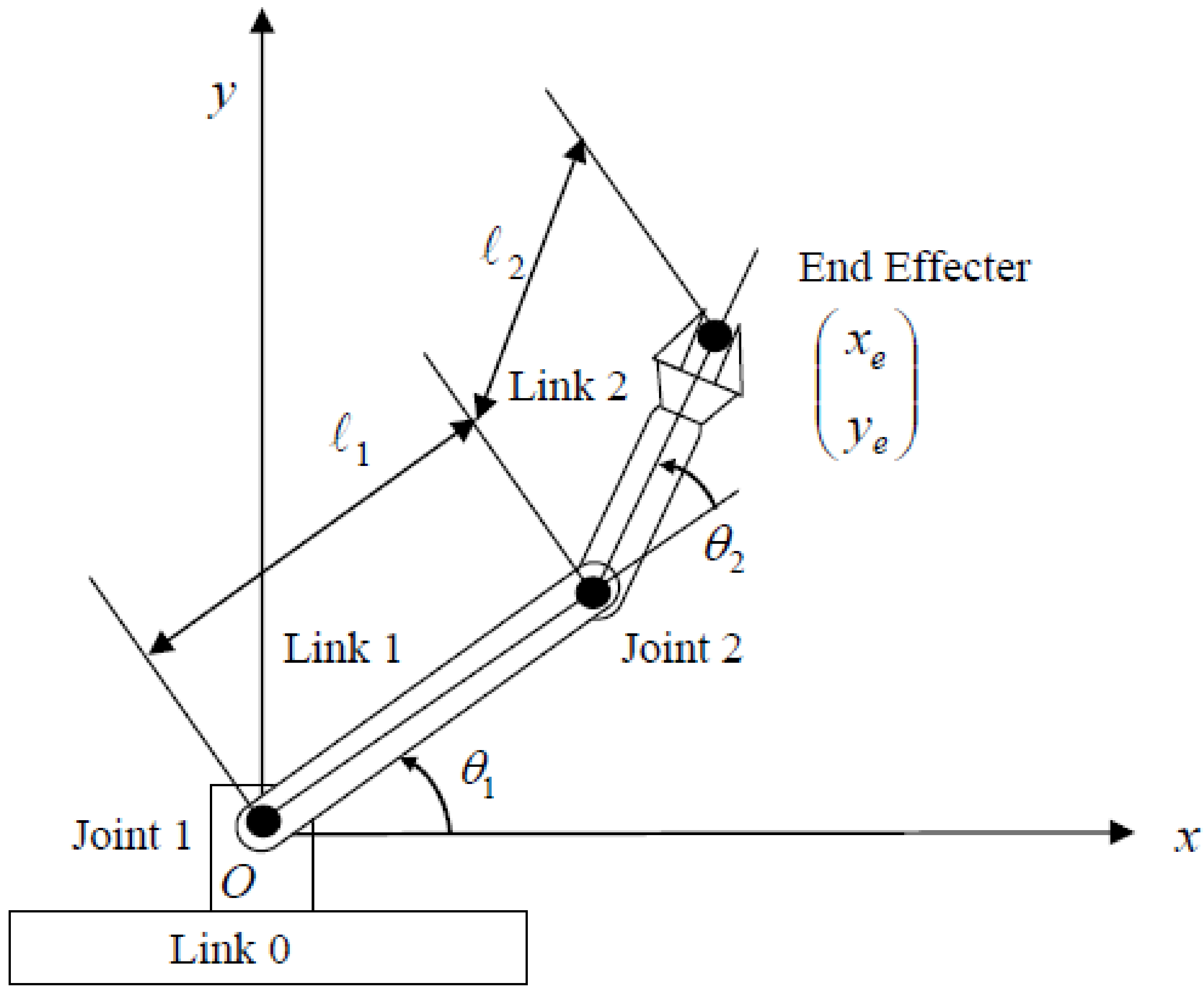
The inverse kinematics problem:

Step 1 Given x_B, y_B, ϕ_B, find x_A, y_A and x_C, y_C

Step 2 Given x_A, y_A, find θ_1, θ_2

Step 3 Given x_C, y_C, find θ_3, θ_4

$$x_e(\theta_1, \theta_2) = \ell_1 \cos\theta_1 + \ell_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$
$$y_e(\theta_1, \theta_2) = \ell_1 \sin\theta_1 + \ell_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$



جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

$$dx_e = \frac{\partial x_e(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial x_e(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} d\theta_2$$

$$dy_e = \frac{\partial y_e(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial y_e(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} d\theta_2$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{q}$$

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx_e \\ dy_e \end{pmatrix}, \quad d\mathbf{q} = \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_e(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial x_e(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \\ \dfrac{\partial y_e(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial y_e(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\ell_1 \sin\theta_1 - \ell_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -\ell_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \ell_1 \cos\theta_1 + \ell_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & \ell_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\mathbf{x}_e}{dt} = \mathbf{J} \frac{d\mathbf{q}}{dt}, \quad \text{or} \quad \mathbf{v}_e = \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{q}}$$