Chapitre 2

Fonctions mesurables

Soit X, Y deux ensembles non vides, $\mathcal{A}$ une tribu sur X, $\mathcal{B}$ une tribu sur Y, et $f : X \to Y$ une application.

2.1 Image réciproque d'une tribu

Définition 2.1. *Soit $\mathcal{G}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$. L'image réciproque de $\mathcal{G}$ par l'application f est l'ensemble suivant :*

$$f^{-1}(\mathcal{G}) = \{A \in \mathcal{P}(X), \exists B \in \mathcal{G} : A = f^{-1}(B)\}.$$

Proposition 2.1. [*15*] *Soit $\mathcal{B}$ une tribu sur Y. Alors, $\mathcal{A} = f^{-1}(\mathcal{B})$, est une tribu sur X, dite la tribu de l'image réciproque de $\mathcal{B}$ par l'application f.*

Proposition 2.2. [*15*] *Si $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ sont deux tribus sur Y telles que $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$. Alors, $f^{-1}(\mathcal{B}_1) \subset f^{-1}(\mathcal{B}_2)$.*

Exemple 2.1. [*15*] *Soit $A \subset \mathcal{X}, i$ l'injection canonique de A dans X, et soit $\mathcal{A}$ une tribu sur X. On a*

$$i^{-1}(\mathcal{A}) = B \in \mathcal{P}(A) : i(B) \in \mathcal{A} = B \in \mathcal{P}(A), \exists C \in \mathcal{A} : B = A \cap C.$$

On appelle $i^{-1}(\mathcal{A})$ la trace de la tribu $\mathcal{A}$ sur A.

Théorème 2.1. [*15*] *Soit $\mathcal{C} \in \mathcal{P}(Y)$, et soit $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. Alors, $f^{-1}(\mathcal{A}(\mathcal{C}))$ est la tribu engendrée par $f^{-1}(\mathcal{C})$.*

2.2 Fonctions mesurables

Définition 2.2. *On dit que $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ est mesurable si et seulement si $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$.*
On désigne par $\mathcal{M}((X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B}))$ l'ensemble des applications mesurables de $(X, \mathcal{A})$ dans $Y, \mathcal{B})$.

Remarque 2.1. *Dans la théorie de probabilité, une application mesurable est appelée variable aléatoire.*

Exemple 2.2. [*5*]

1. *Toute application de $(X, \mathcal{P}(X))$ dans $(X, \mathcal{P}(X))$ est mesurable.*
2. *L'identité de $(X, \mathcal{A})$ dans $(X, \mathcal{A}')$ est mesurable si et seulement si $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$.*

Proposition 2.3. *[12] La fonction constante de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est une fonction mesurable.*

Proposition 2.4. [*5, 6, 13, 14, 15, 16, 17*] *La composition de deux applications mesurables est une application mesurable.*

Théorème 2.2. [*4, 5, 6, 15*] *Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$, qui engendre $\mathcal{B}$. Alors, f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{A}$.*

Définition 2.3. *On munit $(X, \mathcal{A})$ d'une mesure positive μ. On dit que deux fonctions f et g de $(X, \mathcal{A})$ dans $(Y, \mathcal{B})$ sont $\mu-$ équivalentes si $f \equiv g$ presque par tout, et on écrit $f = g(mod\, \mu)$ ou $f = g\, \mu - ppt$*

Théorème 2.3. *[14, 16] Si μ est une mesure complète, alors la fonction $\mu-$ équivalante d'une fonction mesurable est une fonction mesurable.*

2.3 Espaces toplogiques et mesurabilité

Définition 2.4. *Soit (X, τ) un espace topologique séparé.*

i) *On dit que (X, τ) est séparable, ou satisfait au premier axiome de dénombrabilité s'il existe une partie D de X, dénombrable et partout dense dans (X, τ).*

ii) *On dit que (X, τ) est satisfait au deuxième axiome de dénombrabilité s'il existe une base d'ouverts, dénombrable de (X, τ).*

Remarque 2.2. *Toute espace metrique satisfait au premier axiome de dénombrabilité, est satisfait au deuxième axiome de dénombrabilité.*

Proposition 2.5. [15] *On muni Y d'une topologie σ de sorte que (Y, σ) satisfait au deuxième axiome de dénombrabilité, et soit $\{H_n\}_{\infty}^{n=1}$ une base des ouverts de (Y, σ). Alors, $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}_\sigma)$ est mesurable si et seulement si :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : f^{-1}(H_n) \in \mathcal{A}.$$

Proposition 2.6. [5, 13, 14, 15] *On muni X et Y de topologies τ et σ. Alors, toute application continue de (X, τ) dans (Y, σ) est mesurable de $(X, \mathcal{B}_\tau(X))$ dans $(Y, \mathcal{B}_\sigma(Y))$*

On désigne par $\mathcal{L}(X, \mathcal{A})$ l'ensemble des applications mesurables de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Théorème 2.4. *[4, 5, 12, 14, 16, 17] Soit f une application de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Alors : les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A})$,
2. $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}([-\infty, a[) \in \mathcal{A}$,
3. $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}$,
4. $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}(]a, +\infty]) \in \mathcal{A}$,
5. $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}([a, +\infty]) \in \mathcal{A}$.

Corollaire 2.1. *[14] La fonction indicatrice d'une partie mesurable est une partie mesurable.*

Proposition 2.7. [4, 5, 6, 14, 15, 16, 17] *Soit f, g deux applications dans $\mathcal{L}(X, \mathcal{A})$, et soit $c \in \mathbb{R}$. Alors :*

1. $c.f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A})$.
2. $|f| \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A})$.
3. $\{f > g\}, \{f \geq g\}, \{f = g\} \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A})$.
4. $(f + g), f.g \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A})$.
5. *Si g ne s'annule jamais sur X, alors* $\dfrac{1}{g}, \dfrac{f}{g} \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A})$.
6. $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A})$

Corollaire 2.2. *Si f est une fonction mesurable, alors les fonctions* $f^+ = \dfrac{|f| + f}{2} = \sup\{f, 0\}$, $f^- = \dfrac{|f| - f}{2} = \sup\{-f, 0\}$ *sont des fonctions mesurables.*

2.4 Convergences

On munit $(X, \mathcal{A})$ d'une mesure positive μ, et soit $\{f_n\}$ une suite des fonctions de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$. Notons par $d(a, A)$ la distance usuelle entre $a \in \mathbb{R}$ et l'ensemble $A \subset \mathbb{R}$

Définition 2.5. *On dit que la suite $\{f_n\}$ converge $\mu - ppt$ simplement , s'il existe $N \subset X$, $\mu-$ telle que f_n converge simplement vers f dans N.*

Théorème 2.5. [*14, 15, 16*] *Supposons que la suite $\{f_n\}$ est une suite des fonctions mesurables, converge $\mu - ppt$ simplement vers une fonction f. Alors f est une fonction mesurable.*

Définition 2.6. *On dit que la suite $\{f_n\}$ converge $\mu-ppt$ uniformément, s'il existe $N \subset X$, négligeable telle que f_n converge uniformément vers f dans N^c.*

Remarque 2.3. *Il est clair que toute suite converge $\mu - ppt$ uniformément est converge $\mu - ppt$ simplemément.*

Théorème 2.6. [*4, 5, 6, 11, 15*] *Soit $\{f_n\}$ unes suite des fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, alors $\sup f_n, \inf f_n, \overline{\lim} f_n, \underline{\lim} f_n$ sont des fonctions mesurables.*

Définition 2.7. *On dit que la suite $\{f_n\}$ est convergente par la mesure μ, et on écrit $f_n \xrightarrow{\mu} f$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \to +\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

Théorème 2.7. [*Lebesgue*][*14, 16*] *Supposons que la suite $\{f_n\}$ est une suite des fonctions mesurables, finis, converge simplement $\mu - ppt$ vers une fonction f. Alors $f_n \xrightarrow{\mu} f$.*

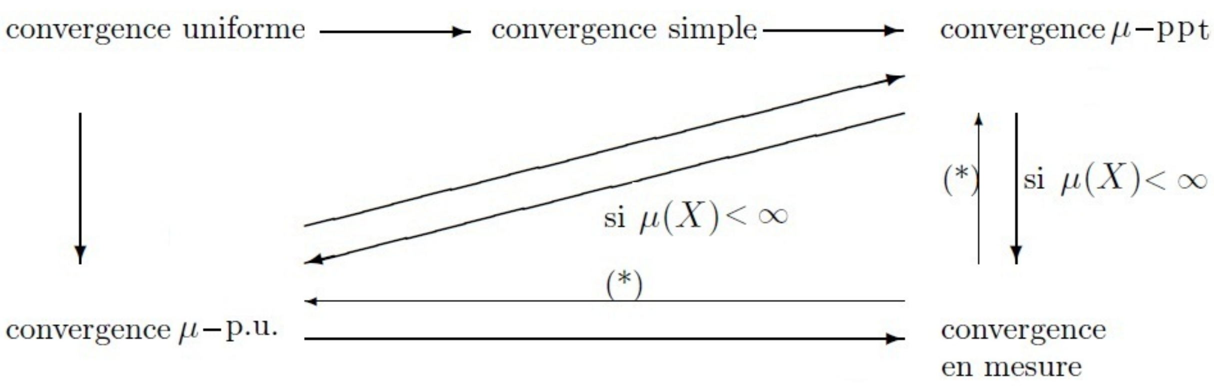
Remarque 2.4. [*14*] *La réciproque du théorème précédant est faux.*

Théorème 2.8. [*Riesz*][*14*] *Supposons que la suite $\{f_n\}$ est une suite des fonctions mesurables, finis, converge par mesure μ vers une fonction f. Alors, on peut extraire une sous-suite $\{f_{\varphi(n)}\}$ converge simplement $\mu - ppt$ vers f.*

Définition 2.8. *On dit que la suite $\{f_n\}$ converge vers f presque uniformément (et on écrit $f_n \longrightarrow f$ $\mu - p.u.$) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie mesurable A_ε telle que $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$, et $\{f_n\}$ converge uniformément vers f sur A_ε^c.*

Théorème 2.9. [*Egorov*][*4, 14, 16*] *Supposons que la suite $\{f_n\}$ est une suite des fonctions converge simplement $\mu - ppt$ vers f. Alors, $\{f_n\}$ converge vers f presque uniformément.*

La figure ci-dessu est extraire de [4]



(*) : pour une suite extraite

2.5 Fonctions simples (étagées)

Définition 2.9. *On dit qu'une fonction f de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ différents est une fonction simple (étagée) si l'ensemble $f(X)$ est une ensemble fini.*

Exemple 2.3. [14] *La fonction indicatrice est une fonction simple.*

Proposition 2.8. [14] *Soit f une fonction simple. Alors, il existe une suite fini $\{A_i\}_{i=1}^n$ des parties de X, et une suite fini $\{c_i\}_{i=1}^n$ des nombres réels telle que $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}$.*

Théorème 2.10. [13, 14, 15, 16] *Soit f une fonction simple, écrit sous la forme $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}$. Alors, f est mesurable sie et seulement si A_i sont tous mesurables.*

Théorème 2.11. [14] *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable. Alors, il existe une suite $\{f_n\}$ des fonctions simples, mesurables, converge simplement vers f.*

Théorème 2.12. [4, 6, 13, 15] *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Il existe une suite des fonctions simples $\{f_n\}$, écrit sous la forme $f_n(x) = \sum_{i=1}^{k_n} c_{n,i} \chi_{A_{n,i}}(x)$, ou $\{A_{n,i}\}$ sont deux à deux adjoints. De plus :*

1. *Si f est mesurable, alors f_n sont mesurables.*
2. *Si f est positive, alors $\{f_n\}$ est croissante et on a : $0 \leq f_n(x) \leq f(x), \forall n, \forall x$.*
3. *Si f est bornée, alors $\{f_n\}$ est converge uniformément vers f.*

Théorème 2.13. [Lusin][14, 16] *Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable, et soit f une fonction de A dans $\mathbb{R}$, mesurable et bornée ppt. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fermée $F_\varepsilon \subset X$ telle que la restriction de f sur F_ε est continue, et on a : $\lambda(F_\varepsilon^c) < \varepsilon$.*