Chapitre 3

Fonctions intégrables

On munit $\overline{\mathbb{R}}$ de la tribu borilienne, et soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mésuré. Tout les fonctions sont des fonctions de X dans $\mathbb{R}$.

3.1 Intégrale d'une fonction mesurable positive

Définition 3.1. *Soit φ une fonction simple, positive, définie sur X comme suivant :*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$$

où $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{A}$ est une partition de X, et $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ est une suite réelle. L'intégrale de la fonction φ sur l'ensemble X par rapport à la mesure μ est le nombre positif achevé :

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) \tag{3.1}$$

Remarque 3.1. *Sachant que $0.\infty = 0$, on a $\int_X \varphi d\mu = 0$ si $\varphi = 0$ ppt sur X.*

Exemple 3.1. [*15*] :

1. *Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \delta)$, où δ est la msure de Dirac au point 0. On a : $\int_{\mathbb{R}} \varphi d\delta = \varphi(0)$.*
2. *Soit l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, où μ est la msure de comptage, et soit $\varphi = \frac{1}{2}\chi_A + \sqrt{3}\chi_B + 0.\chi_C$, où $A = \{0, 1, 2\}, B = \{3, 4, 5, 6, 7\}, C = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 8\}$. On a : $\int_{\mathbb{R}} \varphi d\mu = \frac{3}{2} + 5\sqrt{3}$.*

Théorème 3.1. [*5*, *14*, *15*] : *L'intégrale définie par l'équation* (3.1) *est positif et satisfait les propriétérs suivantes :*

1. *L'intégrale est bien définit, i.e si $\varphi = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$, on a : $\int_X \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j)$.*
2. *Si φ, ψ sont deux fonctions simples, et si $\alpha, \beta > 0$, on a : $\int_X (\alpha\varphi + \beta\psi) d\mu = \alpha \int_X \varphi d\mu + \beta \int_X \psi d\mu$.*
3. *Si φ, ψ sont deux fonctions simples telle que $\varphi = \psi \mu-ppt$, on a : $\int_X \varphi d\mu = \int_X \psi d\mu$.*
4. *Si φ, ψ sont deux fonctions simples telle que $\varphi \leq \psi$, on a : $\int_X \varphi d\mu \leq \int_X \psi d\mu$.*

5. *Soit ν une fonction de $(X,\mathcal{A})$ dans $[0,+\infty]$, définie par : $\forall A \in \mathcal{A} : \nu(A) = \int_X \varphi.\chi_A.d\mu$.*
   ν est une mesure positive sur $(X,\mathcal{A})$, appelée la mesure de densité φ sur X.

Proposition 3.1. *Si φ est une fonction simple, bornée i.e il existe $M > 0$ telle que $|\varphi| \leq M$, alors : $|\int_X \varphi d\mu| \leq M\mu(X)$.*

Définition 3.2. *Soit f une fonction positive, mesurble, définie sur X, et soit $\mathcal{F}_f$ l'ensemble des fonctions simples φ, satisfaites : $0 \leq \varphi \leq f$. L'intégrale de la fonction f sur l'ensemble X par rapport à la mesure μ est le nombre positif achevé :*

$$\int_X f d\mu = \sup\left\{\int_X \varphi d\mu, \varphi \in \mathcal{F}_f\right\}. \tag{3.2}$$

Remarque 3.2. *Si φ est une fonction simple, la valeur de $\int_X \varphi d\mu$ donnée par* (3.1) *est égale à la valeur $\int_X \varphi d\mu$ donnée par* (3.2)*.*

Proposition 3.2. [*4*] : *Soit f une fonction positive, mesurble, définie sur X, et soit $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite des fonctions simples converge uniformément vers f. Alors :*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X \varphi_n d\mu$$

.

Définition 3.3. *Soit A une partie mesurable de X, on pose : $\int_A f d\mu = \int_X f.\chi_A d\mu$.*

Théorème 3.2. [*15*] : *Soient f, g deux fonctions positives, mesurables sur X, alors :*

1. *Si $f = g\mu{-}ppt$, on a : $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.*
2. *$\int_X (f+g) d\mu \geq \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$.*
3. *Si $f \leq g$, on a : $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.*
4. *Si $A, B \in \mathbb{A}$ telles que $A \subset B$, on a : $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.*

3.2 Intégrale d'une fonctions mesurable arbitraire, espace $\mathbf{L^1}$

On sais que si f est une fonction numérique, on a : $f = f^+ - f^-$, où $f^+ = \max\{f, 0\}, f^- = \max\{-f, 0\}$ sont des fonctions positives. On donne alors la définition suivante :

Définition 3.4. *Soit f une fonctione mesurable sur X, on pose : $\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$.*

Proposition 3.3. [*15*] : *Soit f une fonctione mesurable sur X, alors : $\left|\int_X f d\mu\right| = \int_X |f| d\mu$.*

Définition 3.5. *Soit f une fonctione mesurable sur X. On dit que f est Lebesgue intégrable si f est mesurable et $\int_X |f| d\mu < +\infty$. On désigne par $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ l'espace des fonctions Lebesgue intégrables sur $(X,\mathcal{A},\mu)$.*

on désigne par $\sim$ la relation binair définit sur l'espace fonctionnel des fonction mesurables sur X par rapport au mesure μ comme suivant : $f \sim g$ si et seulement si $f = g, \mu$ ppt.
On peut vérifier que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

Proposition 3.4. [5] : *Soient f, g deux fonctions mesurables sur X, telles que $f = g\, \mu-$ ppt sur X. Alors :*

$$\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$$

.

On peut alors donne la définition suivante :

Définition 3.6. *L'espace $L^1(X, \mu)$ est l'espace quotient de $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ sur $\sim$.*
On munit $L^1(X, \mu)$ de la norme suivante : $|f|_{L^1(X,\mu)} = \int_X |f| d\mu$.

Remarque 3.3. *De même manière, l'espace $L^p(X, \mu)\, (p > 0)$ est l'espace des classes des fonctions mesurables f telles que $f^p \in L^1(X, \mu)$, ie $\int_X |f|^p d\mu < +\infty$.*

Théorème 3.3. *L'espace $L^1(X, \mu)$ munit de la norme $|.|_{L^1(X,\mu)}$ est un espace de Banach.*

Théorème 3.4 (Inégalité de Tchibichev)**.** *Soit f une fonction mesurable sur X, alors :*

$$\forall \lambda > 0 : \lambda \mu(\{f > \lambda\}) \leq \int_X |f| d\mu$$

.

Corollaire 3.1. *Soit f une fonction mesurable sur X.*

1. *Si $f \in L^1(X, \mu)$, alors f est fini $\mu-$ ppt.*
2. *Si $\int_X |f| d\mu = 0$, alors $f = 0\, \mu-$ ppt sur X*

3.3 Théorèmes de convergence

Théorème 3.5. [***convergence monotone de Beppo Levi***][5, 15, 16] : *Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite croissante des fonctions mesurables, positives, bornées $\mu-$ ppt sur X. Alors, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ existe partout, positive, mesurable, et on a :*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu = \sup_n \int_X f_n d\mu$$

.

Corollaire 3.2. [15] : *Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite $\mu-$ ppt croissante des fonctions mesurables, positives, bornées $\mu-$ ppt sur X. Alors, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ existe $\mu-$ ppt, positive, mesurable, et on a :*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu$$

.

Théorème 3.6. [15] : *Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite $\mu-$ ppt croissante des fonctions mesurables, positives, bornées $\mu-$ ppt sur X. On pose : $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Alors, f est positive, mesurable, et on a :*

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$$

Théorème 3.7. [***Lemme de Fatou***][5, 15, 16] : *Soit* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *une suite des fonctions mesurables sur* X. *Supposons qu'il existe une fonction intégrable* g *telle que* $g \leq f_n$, *pour tout* n. *Alors :*

$$\int_X \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n d\mu$$

.

Corollaire 3.3. [15] : *Soit* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *une suite des fonctions mesurables sur* X. *Supposons qu'il existe une fonction intégrable* g *telle que* $f_n \leq g$, *pour tout* n. *Alors :*

$$\overline{\lim} \int_X f_n d\mu \leq \int_X \overline{\lim} f_n d\mu$$

.

Définition 3.7. *Soit* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *une suite des fonctions dans* $L^1(X,\mu)$, *et soit* $f \in L^1(X,\mu)$.
On dit que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge vers* f *dans* $L^1(X,\mu)$, *et on écrit* $f_n \overset{L^1(X,\mu)}{\longrightarrow} f$ *si et seulement si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$.

Théorème 3.8. [***Convergene dominée de Lebesgue***][5, 6, 15, 16] : *Soit* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *une suite des fonctions intégrables sur* X. *Supposons que :*

1. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge* $\mu-$ *ppt vers une fonction* f.
2. *Il existe une fonction intégrable* g *telle que* $|f_n| \leq g\, \mu$ *ppt pour tout* n.

Alors : f *est intégrable et* $f_n \overset{L^1(X,\mu)}{\longrightarrow} f$ (*ce qui donne* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$).

Corollaire 3.4. [5] : *Soit* $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu$, *et soit* $\{A_n\} \subset$ *une suite des éléments de* $\mathcal{A}$, *disjoint deux à deux telle que* $X = \bigcup\limits_n A_n$. *Alors :*

$$\int_X f d\mu = \sum_n \int_{A_n} f d\mu$$

.

Théorème 3.9. [***généralisation***][15] : *Soit* $\{f_\alpha\}_{\alpha\in[a,b[}$ *une famille des fonctions intégrables sur* X. *Supposons que :*

1. $\{f_\alpha\}_{\alpha\in[a,b[}$ *converge* $\mu-$ *ppt vers une fonction* f *lorsque* α *tend vers* b.
2. *Il existe une fonction intégrable* g *telle que* $|f_\alpha| \leq g\, \mu$ *ppt pour tout* $\alpha\, \mu$ *ppt sur* X.

Alors : f *est intégrable et on a :*

$$\lim_{\alpha\to b} \int_X f_\alpha d\mu = \int_X f d\mu$$

.

Remarque 3.4. *On trouve une résultat analogue lorsque* $\alpha \in]a,b]$.

3.4 Applications

Proposition 3.5. [5, 15] : *Soient* f, g *deux fonctions mesurables sur* X, *et soit* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Alors :*

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu$$

.

Proposition 3.6. [5] : *Soient f, g deux fonctions mesurables sur X, telles que $f \leq g$. Alors :*

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$$

.

Proposition 3.7. [15] : *Soit ν une fonction de $(X, \mathcal{A})$ dans $[0, +\infty]$, définie par :*

$$\forall A \in \mathcal{A} : \nu(A) = \int_A f d\mu.$$

Alors, ν est une mesure positive sur $(X, \mathcal{A})$, appelée la mesure de densité f sur X.

Théorème 3.10. [***continuité sous signe d'intégrale***][4] : *Soit $f(x,t)$ une fonction définie sur $X \times]a, b[$. Supposons que la fonction $f(., t)$ est mesurable pour tout $t \in]a, b[$, et on pose :*

$$G(t) = \int_X f(x,t) d\mu(x).$$

Soit $t_0 \in]a, b[$, on suppose que :

1. *La fonction $f(x,t)$ est continue au point t_0, et $\mu-$ ppt sur X.*
2. *Il existe une fonction intégrable g telle que pour tout t au voisinage de t_0 on a : $F(x,t) \leq g(x)$ $\mu-$ ppt sur X.*

Alors, la fonction G est continue au point t_0).

Théorème 3.11. [***dérivabilité sous signe d'intégrale***][4, 11, 15] : *Soit $F(x,t)$ une fonction définie sur $X \times]a, b[$. Supposons que la fonction $F(., t)$ est intégrable pour tout $t \in]a, b[$, et on pose :*

$$G(t) = \int_X F(x,t) d\mu(x).$$

Soit $t_0 \in]a, b[$, on suppose que :

1. $\dfrac{\partial F}{\partial t}(x, t_0)$ *existe $\mu-$ ppt sur X.*
2. *Il existe une fonction intégrable g telle que pour tout t au voisinage de t_0 on a : $\dfrac{F(x,t) - F(x,t_0)}{t - t_0} \leq g(x)$ $\mu-$ ppt sur X.*

Alors : $\dfrac{\partial F}{\partial t}(x, t_0)$ existe est intégrable et on a :

$$\left\{ \frac{dG}{dt} \right\}_{t=t_0} = \int_X \frac{\partial F}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x)$$

.

3.5 Intégrale de Lebesgue et intégrale de Riemann

Maintenant, on s'interresse à l'intégrale de Lebesgue des où $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda$.
On appelle fonction mesurable toute fonction de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.
Les fonctions de l'espace $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda)$ sont appelées des fonctions intégrables.

On désigne par $\int_I f dx$ l'intégrale $\int_I f d\lambda$, et on désigne par $\int_a^b f(x) dx$ à l'intégrale de Rimann (généralisé) de la fonction f s'il existe.

Théorème 3.12. [4, 15, 16] : *Soit f une fonction définie et bornée sur l'intervalle compact $I = [a, b]$. Si f est Rimann intégrable sur I, alors f est Lebesgue intégrable sur I, et on a :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_I f dx$$

.

Remarque 3.5. *La réciproque est faux. Par example la fonction de Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}\cap[a,1]}$ est Lebesgue intégrable, mais n'est pas Rimann intégrable.*

Théorème 3.13. [4, 15] : *Soit f une fonction définie et bornée sur l'intervalle compact $I = [a, b]$. Alors : f est Rimann intégrable sur I, si et seulement si f est continue ppt sur I.*

Théorème 3.14. [4, 15] : *Soit f une fonction définie et positive sur l'intervalle $I =]a, b], (a, b \in \overline{\mathbb{R}})$. Si f est Rimann intégrable (au sens général) sur I, alors f est Lebesgue intégrable sur I, et on a :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_I f dx$$

.

Remarque 3.6. *La positivité (où l'absolument convergence) de la fonction f est nécessaire, par example :*

1. *La fonction $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ est Rimann généralisé intégrable sur $]0, 1]$, mais n'est pas Lebesgue intégrable.*
2. *La fonction $\frac{\sin x}{x}$ est Rimann généralisé intégrable sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas Lebesgue intégrable.*