Université Med BOUDIAF M'sila
Faculté de Technologies
Département de Génie mécanique

MODULE : MDF APPROFONDIE TD N°1 AVEC SOLUTION

1ère Master CONSTRUCTION MECANIQUE.

Exercice 1 :

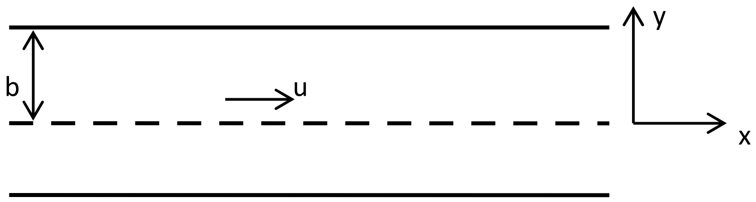
Donner l'équation de mouvement d'un écoulement permanent, irrotationnel, pour un fluide incompressible pour :

- un fluide réel ?
- un fluide parfait ?

Exercice 2 :

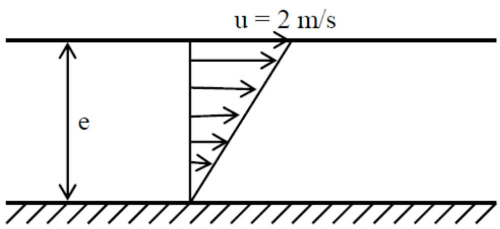
-

- Etablir l'équation de mouvement d'un écoulement permanent d'un fluide réel incompressible se produit entre deux plaques planes lisses parallèles ?
- (Ecoulement monodimensionnel suivant x)



EXERCICE 3 :

Un écoulement d'un liquide de viscosité dynamique $\mu = 2.10^{-2}$ N.s/m², sur une plaque plane fixe, est caractérisé par le profil donné par le schéma ci-dessous :



si l'épaisseur de l'écoulement est e = 5 cm, déterminer la valeur de la contrainte de cisaillement :
a- à la paroi ?
b- à une distance de 2 cm de la paroi ?
c- à une distance e de la paroi ?

N. HEBICHE.

SOLUTION TD N°1 MDF APPROFONDIE

EX1

Pour un fluide réel, l'équation d'Euler s'écrit :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+rot\vec{V}\wedge\vec{V}+\frac{1}{2}.\overrightarrow{grad}\,p\right)=-\overrightarrow{grad}\,p+\rho\vec{g}+\mu\Delta\vec{V}$$

Pour un écoulement permanent, nous avons : $\frac{\partial V}{\partial t}=0$

Pour un écoulement irrotationnel, nous avons : $rot\vec{V}=0$

Avec $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{V})=\overrightarrow{grad}(div\vec{V})-div(\overrightarrow{grad}\vec{V})$

On admet que la force de pesanteur dérive d'un potentiel U : $\vec{g}=\overrightarrow{gradU}$

$$\Rightarrow\ \rho(\frac{1}{2}\overrightarrow{gradV^2})=-\overrightarrow{grad}\,p+\rho\overrightarrow{gradU}+\mu\Delta\vec{V}$$

$$\Rightarrow\ \rho(-\overrightarrow{gradU}+\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}\,p+\frac{1}{2}\overrightarrow{gradV^2})=\mu.\Delta\vec{V}$$

$$\Rightarrow\rho.\overrightarrow{grad}(-U+\frac{1}{\rho}p+\frac{1}{2}V^2)=\mu.\Delta\vec{V}$$

On a : U = -g.z $\Rightarrow\ \rho.\overrightarrow{grad}(gz+\frac{1}{\rho}p+\frac{1}{2}V^2)=\mu.\Delta\vec{V}$

Pour un fluide parfait, nous avons : $\mu=0$

$$\Rightarrow\rho.\overrightarrow{grad}(gz+\frac{1}{\rho}p+\frac{1}{2}V^2)=0$$

$$\Rightarrow gz+\frac{1}{\rho}p+\frac{1}{2}V^2=Constante$$

Divisant les deux termes de l'équation par g ; nous aurons :

$$z+\frac{p}{\varpi}+\frac{1}{2g}V^2=Cte$$

Cette dernière n'est autre que l'équation de Bernoulli.

EX2

L'équation d'Euler s'écrit :

Suivant x : $\rho.(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z})=\frac{-\partial p}{\partial x}+\mu\Delta u$

Suivant y : $\rho.(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z})=\frac{-\partial p}{\partial y}+\mu\Delta v$

Suivant z : $\rho.(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z})=\frac{-\partial p}{\partial z}+\mu\Delta w$

On a aussi écoulement monodimensionnel :

$$\begin{cases} v=w=0 \\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0 \\ \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \end{cases}$$

Et puisque c'est incompressible et permanent, on peut écrire de l'équation de continuité :

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial t}=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Les trois équations d'Euler deviennent : $\frac{-\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $\frac{\partial p}{\partial y}=0$, et $\frac{\partial p}{\partial z}=0$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=0$$

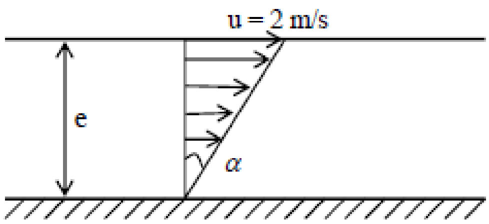
Qui démontre que c'est un écoulement de Couette.

EX3

Nous avons :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Et d'après le profil, on a : $\operatorname{tg}\alpha = \frac{u_{max}}{e} = \frac{u}{y} \Rightarrow u = \frac{u_{max}}{e}.y = \frac{2}{0{,}05}.y = 40y$



$$\frac{du}{dy} = 40$$

$$\Rightarrow \tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu.40 = 2.10^{-2}.40 = 0{,}8\ \text{N/m}^2$$

Puisque $\frac{du}{dy}$ est constante, la valeur de la tension de cisaillement est constante à n'importe quel point de l'écoulement est égale à 0,8 N/m².