Table des matières

Chapitre 1

Dualité

1.1 Topologie faible

Dans tout ce qui suit E sera un espace de Banach. On rappelle que E^* désigne le dual topologique de E; c'est- a-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur E.

Définition 1.1.1 *La topologie faible de E est la topologie la moins fine pour laquelle toutes les formes linéaires continues $\varphi \in E^*$ restent continues. On la note $\sigma(E, E^*)$, ou plus rapidement w.*

Par définition, la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ est moins fine que la topologie de la norme, c'est-à-dire que l'application identité

$$Id : (E, \|\cdot\|) \to (E, w)$$

est continue.

Les ouverts pour la topologie faible sont les réunions quelconques d'intersections finies d'ensembles du type $\varphi^{-1}(\mathcal{O})$ avec $\mathcal{O}$ ouvert de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{C}$ si E est un e.v. sur $\mathbb{C}$). Etant donné que les intervalles ouverts constituent une base de voisinages pour $\mathbb{R}$, on en déduit le résultat suivant.

Bases de voisinages pour la topologie faible:

Tout voisinage de $x_0 \in E$ pour la topologie $\sigma(E, E^*)$ contient un ouvert du type

$$\bigcap_{i=1}^{N} \{x \in E : |\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| < \varepsilon_i\}$$

avec $\varepsilon_i > 0$ et $\varphi_i \in E^*$.

On peut donc munir E de deux topologies sépar ees differentes :

1- La **topologie forte** associée a la norme de E,

2- La **topologie faible** notée $\sigma(E, E^*)$.

Par construction, la topologie $\sigma(E, E^*)$ est moins fine que la topologie forte : tout ouvert pour la topologie faible est un ouvert pour la topologie forte.

Remarque 1.1.1 ♣ *La topologie faible est séparée.*

♣ *Si* $\dim E < +\infty$*, ces deux topologie coïncident.*

1.2 Convergence faible

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de E, et $x \in E$. On note

♣ Convergence forte : $x_n \to x$.

♣ Convergence faible : $x_n \rightharpoonup x$.

Proposition 1.2.1 *La suite* $(x_n)_{n\geq 1}$ *converge vers* x *pour la topologie faible si et seulement si :*

$$\varphi\left(x_n\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \varphi\left(x\right), \ \forall \varphi \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R}).$$

On notera:

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{w}{\to}} x \qquad ou \quad x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\sigma(E,E^*)}{\to}} x \qquad ou\ encore\ w - \lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

Remarque 1.2.1 *1- La limite faible d'une suite* $(x_n)_{n\geq 1}$ *existe , elle est unique*

2- On appelle convergence forte la convergence au sens de la norme qui l'on note $x_n \to x$ $(\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0)$

3- La convergence forte $(x_n \to x)$ *implique la convergence faible* $\left(x_n \overset{w}{\to} x\right)$ *car*

$$\begin{aligned} \left|\varphi\left(x_n\right) - \varphi\left(x\right)\right| &= \left|\varphi\left(x_n - x\right)\right| \\ &\leq \|\varphi\| \|x_n - x\| \to 0 \end{aligned}$$

Exemple 1.2.1 *Les théorèmes de représentation du dual pour les espaces de Hilbert et pour les espaces* L^p *donnent :*

1- Si $E = H$ est un espace de Hilbert, alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{w}{\to}} x$ si et seulement si :

$$\langle x_n, y\rangle \underset{n\to+\infty}{\to} \langle x, y\rangle, \ \forall y \in H$$

2- Soit $(S, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Pour $1 < p < \infty$ et pour $p = 1$ lorsque μ est $\sigma-$finie, $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{w}{\to}} f$ dans $L^p(\mu)$ si et seulement si :

$$\int_\Omega f_n g d\mu \underset{n\to+\infty}{\to} \int_\Omega f g d\mu, \ \forall g \in L^q(\mu)$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Proposition 1.2.2 *Toute suite $(x_n)_{n\geq1}$ faiblement convergente dans un espace de Banach est bornée. De plus, si la limite est x, on a $\|x\| \leq \liminf\limits_n \|x_n\|$.*

Proposition 1.2.3 *Soit H un espace de Hilbert. Si l'on a les deux conditions suivantes :*
1) $x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{w}{\to}} x$,
2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$ (il y a convergence en norme).

Pour l'espace $\mathcal{C}(K)$ des fonctions continues sur un compact K, on a le résultat suivant.

Proposition 1.2.4 *Soit K un espace compact. Alors la suite $(f_n)_{n\geq1}$ converge faiblement vers f dans $\mathcal{C}(K)$ si et seulement si :*
1) la suite $(f_n)_{n\geq1}$ est bornée dans $\mathcal{C}(K)$:

$$\exists M > 0 \quad \|f_n\|_\infty \leq M \quad \forall n \geq 1$$

2) cette suite converge simplement: $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} f(x)$, $\forall x \in K$.

1.3 Topologie faible étoile

Soit E un Banach. On sait que E^* est aussi un espace de Banach. On note E^{**} l'ensemble des formes linéaires continues sur E^*. C'est aussi un espace de Banach appelé bidual de E. On munit E^* par deux topologies:

1- La topologie forte associée à la norme de E^* ,

2- La topologie faible sur E^* , notée $\sigma(E^*, E^{**})$:

La deuxième topologie est en général strictement plus faible que la première : elle a moins d'ouverts et de fermés. On va définir maintenant une troisième topologie sur E^*: la topologie *-faible que l'on note $\sigma(E^*, E)$ ou plus simplement w^*. On dit aussi que c'est la topologie préfaible sur E^*. Pour chaque $x \in E$, on associe une forme linéaire J_E sur E^* en posant

$$\begin{array}{rlll} J_E : & X^* & \to & \mathbb{R} \\ & f & \to & \varphi_x(f) = f(x). \end{array}$$

On a pour tout $(x, f) \in E \times E^*$

$$|J_E(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_{E^*} \|x\|_E$$

On obtient J_E est une forme linéaire continue sur E^* et

$$\|J_E\|_{E^{**}} \leq \|x\|_E .$$

En fait, par tle théorème de Hahn-Banach assure que

$$\|J_E\|_{E^{**}} = \|x\|_E .$$

Définition 1.3.1 *On appelle topologie *-faible, ou topologie weak-star sur E^* la topologie la moins fine rendant continues toutes les formes linéaires issues de X:*

$$\begin{array}{rlll} \tilde{x} : & E^* & \to & \mathbb{R} \\ & \varphi & \to & \tilde{x}(\varphi) = \varphi(x) \end{array}$$

pour $x \in X$.

1.4 Espaces réflexifs

La topologie préfaible w^* coïncide avec la topologie faible w sur X^* si et seulement si les formes linéaires $\tilde{x}$, pour $x \in X$, composent l'ensemble des formes linéaires continues (en norme, ou pour la topologie faible) sur X^*; en d'autres termes, si et seulement si l'injection canonique :

$$\begin{array}{rlll} i : & X & \to & X^{**} \\ & x & \to & i(x) \end{array} \quad \text{où} \quad \begin{array}{rlll} i(x) : & X^* & \to & \mathbb{R} \\ & \varphi & \to & i(x)(\varphi) = \varphi(x) \end{array}$$

est surjective.

Définition 1.4.1 *On dit que l'espace de Banach E est réflexif si l'injection canonique :*

$$\begin{array}{rlll} i: & X & \rightarrow & X^{**} \\ & x & \rightarrow & \tilde{x} = i(x) \end{array}$$

est surjective.

Exemple 1.4.1 *1- Tout un espace de Hilbert* ***(en particulier*** $L^2(\Omega), \ell_2$ *) est réflexif*
2- Pour $1 < p < \infty$*,* $L^p(\Omega)$ *et* ℓ_p *sont réflexifs.*
3- $L^1(\Omega), L^\infty(\Omega), \ell_1, \ell_\infty$ *ne sont pas réflexifs.*

Théorème 1.4.1 *(Théorème de Kakutani [1940]). Un espace de Banach E est réflexif si et seulement si sa boule unité est faiblement compacte.*

D'après le théorème précédent, on a les résultats:
♣ Pour tout espace de Hilbert H, la boule-unité B_H est faiblement compacte.
♣ Pour $1 < p < \infty$, et toute mesure μ, la boule-unité de $L^p(\mu)$ est faiblement compacte.

Corollaire 1.4.1 *Pour tout espace de Banach E, on a :*

$$E \text{ est réflexif} \Leftrightarrow E^* \text{ est réflexif.}$$

Résultats importants

1- Si X est un espace de Banach séparable, alors de toute suite bornée $(\varphi_n)_n$ dans X^*, on peut extraire une sous-suite préfaiblement convergente.

2- Si X est un espace de Banach réflexif, alors de toute suite bornée $(x_n)_n$ dans X on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.

1.5 Quelques exercices corrigés

Exercice 1.5.1 *Soit X, Y deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*
1) Par la définition de $\|T\|$, montrer l'existence d'une suite normée $(x_n)_n$ (i.e. $\|x_n\| = 1$ pour tout n) dans X telle que

$$\|T\| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|T(x_n)\| \tag{1.5.1}$$

Dans la suite de l'exercice supposons que X et Y sont des espaces de Hilbert complexes.
2) Soit $(x_n)_n$ une suite normée de X faiblement convergente vers x. Établir l'égalité

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\|x_n-x\|^2=1-\|x\|^2$$

3) Soit $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ tel qu'aucun vecteur $x\in X$ normé ne vérifie $\|T(x)\|=\|T\|$ (norme non atteinte).
3-a) Déduire l'existence d'une suite normée $(z_n)_n$ faiblement convergente et vérifier (1.5.1)
3-b) Montrer que toute telle suite converge faiblement vers zéro.

Solution 1.5.1 *1)Par la définition de $\|T\|$, on a*

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|T(x)\|\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists x\in X\ \ tq\ \ \|x\|=1\ \ et\ \ \|T\|-\varepsilon<\|T(x_n)\|\leq\|T\|$$

Pour $\varepsilon=\frac{1}{n}$

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|T(x)\|\Leftrightarrow\forall n>0,\exists x_n\in X\ \ tq\ \ \|x_n\|=1\ \ et\ \ \|T\|-\frac{1}{n}<\|T(x_n)\|\leq\|T\|$$

en passe a la limite

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\|T\|-\frac{1}{n}\right)<\lim_{n\longrightarrow+\infty}\|T(x_n)\|\leq\lim_{n\longrightarrow+\infty}\|T\|\Leftrightarrow\|T\|=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\|T(x_n)\|.$$

2) On a

$$\begin{aligned}\|x_n-x\|^2&=\langle x_n-x,x_n-x\rangle\\&=\langle x_n,x_n\rangle+\langle x,x\rangle-2\operatorname{Re}\langle x_n,x\rangle\\&=\|x_n\|^2+\|x\|^2-2\operatorname{Re}\langle x_n,x\rangle\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\|x_n-x\|^2=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\|x_n\|^2+\lim_{n\longrightarrow+\infty}\|x\|^2-2\lim_{n\longrightarrow+\infty}\operatorname{Re}\langle x_n,x\rangle=1-\|x\|^2$$

3) Comme $(x_n)_n$ une suite normée bornée, donc on peut extraire une sous suite normée $(z_n)_n$ soit faiblement convergente.
4) Supposons que $z_n\rightharpoonup z$, on a

$$\|T(z_n)-T(z)\|^2=\|T(z_n-z)\|^2\leq\|T\|^2\|z_n-z\|^2$$

D'autre part

$$\|T(z_n) - T(z)\|^2 = \langle T(z_n) - T(z), T(z_n) - T(z) \rangle = \|T(z_n)\|^2 + \|T(z)\|^2 - 2 \langle T(z_n), T(z) \rangle$$

donc

$$\|T(z_n)\|^2 + \|T(z)\|^2 - 2 \langle T(z_n), T(z) \rangle \leq \|T\|^2 \|z_n - z\|^2$$

passant à la limite

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|T(z_n)\|^2 + \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|T(z)\|^2 - 2 \lim_{n \longrightarrow +\infty} \langle T(z_n), T(z) \rangle \leq \|T\|^2 \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|z_n - z\|^2$$

D'après (1.5.1) et la demande (2), on trouve

$$\|T\|^2 - \|T(z)\|^2 \leq \|T\|^2 \left(1 - \|z\|^2\right) \Leftrightarrow \|T(z)\| \geq \|T\| \|z\|$$

d'où

$$\|T(z)\| = \|T\| \|z\|$$

si $z \neq 0$, *on pose* $y = \frac{z}{\|z\|}$

$$\|T(y \|z\|)\| = \|T\| \|z\| \Rightarrow \|T(y)\| = \|T\|$$

contraduction car la norme est non atteinte.

forcément $z = 0$.