

M1 Tech. de Prod. Industrielle, 51

Chap III

d'équation générale de la Conduction thermique

Chap III

L'équation générale de la Conduction

En appliquant le premier principe de la thermodynamique à un élément de volume au repos et en exprimant le bilan thermique relatif à cet élément de volume, on aboutit à l'équation

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} (k \vec{\text{grad}} T) + \dot{q}_s$$

soit dans sa forme développée

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_s$$

* cas d'une conductivité uniforme et isotrope
 $k = \text{cte}$;

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T + \frac{\dot{q}_s}{\rho C}$$

$\dot{q}_s$: source volumique de chaleur (W/m^3)

a : la diffusivité thermique (m^2/s)

* Écoulement stationnaire sans source

$$\boxed{\nabla^2 T = \Delta T = 0} \quad \text{d'équation de Laplace}$$

Le Laplacien Δ s'exprime ainsi :

- En Coordonnées cartésiennes (x, y, z)

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

- En Coordonnées cylindriques (r, φ, z)

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\Delta T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

- En Coordonnées sphériques (r, φ, ψ)

$$\Delta T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2}$$

Conditions initiale et aux limites

Pour résoudre l'équation de la Conduction, il faut lui associer des conditions spécifiques à chaque problème :

- La Condition initiale qui donne la répartition de température dans tout volume considéré à l'instant $t = 0$.
- Les Conditions aux limites qui précisent

Comment la chaleur peut traverser le contour du volume considéré.

Exercice

Differentes formes de l'équation de la conduction thermique

Reprendre l'équation de la conduction thermique et la réécrire dans les deux cas suivants :

a) $k = k(T)$

b) $k = k(x, y, z)$

a) Condition de Dirichlet ou de 1^{ère} espèce
 On se donne en chaque point p du contour, la valeur de la température $T(p, t) = T_s = f(p, t) = f(x_s, y_s, z_s, t)$
 p : point sur la surface

b) Condition de Neumann ou de 2^{ème} espèce
 la densité de flux de chaleur, c'est à dire la dérivée normale de la température $\frac{dT}{dn}(p, t)$ est connue en tout point p du contour

$$\dot{q} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = f(p, t)$$

Si on a une surface adiabatique $\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = 0$

c) Condition de Fourier, ou de 3^{ème} espèce
 la densité de flux de chaleur sur le contour est contrôlée par une conductance surfacique externe h connue et par la température T_∞ ambiante le long du contour
 $-k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = \dot{q} = h(T_s - T_\infty)$

d) Lorsque le contour rayonne dans l'espace environnant, la condition aux limites s'écrit
 $-k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = \sigma \Sigma (T^4 - T_\infty^4) \quad T_\infty \text{ en } ^\circ K$
 avec $\sigma = 5,669 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$ Constante de Stefan - Boltzmann

Σ = émissivité totale hémisphérique
 $0 < \Sigma \leq 1$

Contact thermique entre deux surfaces accolées

D'autres conditions aux limites peuvent être évitées pour décrire le passage de la chaleur d'un volume à un autre à travers leurs contours mis en contact direct. Même si les surfaces sont réputées lisses, la chaleur ne transite pas nécessairement avec facilité d'un corps à l'autre et on est conduit à parler de contacts thermiques parfaits ou imparfaits.

Deux surfaces sont en contact au point P qui peut être considéré comme appartenant au volume 1 (dont les propriétés thermophysiques sont $k_1, \rho_1, c_1, \dots$) ou au volume 2 ($k_2, \rho_2, c_2, \dots$). Pour chacun des corps

les flux surfaciques sont au point P :

$$\dot{q}_1 = -k_1 \frac{dT_1}{dn_1} \quad \text{et} \quad \dot{q}_2 = -k_2 \frac{dT_2}{dn_2}$$

1°/ On exprime généralement la continuité du flux surfacique au contact des surfaces. Pour la température, il existe une discontinuité, au point, lorsque le contact n'est pas excellent.

a) Contact parfait

$$T_1(P) = T_2(P)$$

$$\dot{q}_1(P) = \dot{q}_2(P)$$

b) Contact imparfait

$$\dot{q}(P) = \dot{q}_1(P) = \dot{q}_2(P)$$

$$\frac{|T_1(P) - T_2(P)|}{\dot{q}(P)} = \frac{1}{h}$$

h est la conductance surfacique de contact.