M1 Energetique, S1

Chap III

L'equation générale de la Conduction thermique

Chap III

L'equation generale de la Conduction

En appliquant le premier principe de la thermodynamique à un element de volume au repos et en exprimant le bilan thermique relatif à cet element de volume, on aboutit à l'equation

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}\left(k \, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T\right) + \dot{q}_s$$

soit dans sa forme developpée

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q}_s$$

* Cas d'une conductivité uniforme et isotrope $k = cte$;

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \, \Delta T + \frac{\dot{q}_s}{\rho c}$$

$\dot{q}_s$: source volumique de chaleur (W/m^3)

a : la diffusivite thermique (m^2/s)

* Ecoulement stationnaire sans sources

$\boxed{\nabla^2 T = \Delta T = 0}$ l'equation de Laplace

Le Laplacien Δ s'exprime ainsi :

- En Coordonnées cartesiennes (x, y, z)

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

- En Coordonnées cylindriques (r, φ, z)

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\Delta T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

- En Coordonnées spheriques (r, φ, ψ)

$$\Delta T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\psi}\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\sin\psi \frac{\partial T}{\partial \psi}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\psi}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi}$$

Conditions initiale et aux limites

Pour resoudre l'equation de la Conduction, il faut lui associer des conditions spécifiques à chaque probleme :

- La Condition initiale qui donne la repartition de temperature dans tout volume Considéré à l'instant $t = 0$.
- Les Conditions aux limites qui précisent

Comment la chaleur peut traverser les contours du volume considéré.

Exercice

Differents forms de l'equation de la conduction thermique

Reprendre l'equation de la conduction thermique et la réécrire dans les deux cas suivants :

a) $k = k(T)$

b) $k = k(x, y, z)$

a) Condition de Derichlet ou de $1^{ère}$ espèce

On se donne en chaque point P du Contour, la valeur de la température $T(P,t) = T_S = f(P_S, t) = f(x_S, y_S, z_S, t)$

P_S : point sur la surface

b) Condition de Neumann ou de seconde espèce

la densité de flux de chaleur, c'est à dire la dérivée normale de la température $\frac{dT}{dn}(P,t)$ est connue en tout point P du Contour

$$\dot{q} = -k\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_S = f(P_S, \tau)$$

Si on a une surface adiabatique $\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_S = 0$

c) Condition de Fourier ou de $3^{ème}$ espèce

La densité de flux de chaleur sur le Contour est contrôlée par une Conductance surfacique externe h connue et par la température T_∞ ambiante long du Contour

$$-k\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_S = \dot{q} = h(T_S - T_\infty)$$

d) Lorsque le Contour rayonne dans l'espace environnant, la Condition aux limites s'écrit

$$-k\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right) = \sigma\Sigma\left(T^4 - T_\infty^4\right) \quad T \text{ en } {}^\circ K$$

avec $\sigma = 5{,}669 \cdot 10^{-8}$ W/m^2K^4 Constante de Stefan-Boltzmann

Σ = émissivité totale hémisphérique

$$0 < \Sigma \leq 1$$

Contact thermique entre deux surfaces accolées

D'autres conditions aux limites peuvent être écrites pour décrire le passage de la chaleur d'un volume à un autre à travers leurs contours mis en contact direct. Même si les surfaces sont reputées lisses, la chaleur ne transite pas necessairement avec faculté d'un corps à l'autre et on est conduit à parler de contacts thermiques parfaits ou imparfaits.

Deux surfaces sont en contact au point P qui peut être considéré comme appartenant au volume 1 (dont les propriétés thermophysiques sont $k_1, \rho_1, c_1 \dots$) ou au volume 2 ($k_2, \rho_2, c_2 \dots$). Pour chacun des corps les flux surfaciques sont au point P :

$$\dot{q}_1 = -k_1 \frac{dT_1}{dn_1} \quad \text{et} \quad \dot{q}_2 = -k_2 \frac{dT_2}{dn_2}$$

1°/ On exprime generalement la continuite du flux surfacique au contact des surfaces. Pour la temperature, il existe une discontinuité, un saut, lorsque le contact n'est pas excellent.

a) Contact parfait

$$T_1(P) = T_2(P)$$
$$q_1(P) = q_2(P)$$

b) Contact imparfait

$$\dot{q}(P) = \dot{q}_1(P) = \dot{q}_2(P)$$
$$\frac{|T_1(P) - T_2(P)|}{q(P)} = \frac{1}{h}$$

h est la conductance surfacique de contact.