1 Relations binaires et leurs propriétés

Définition 1.1
Une relation binaire sur un ensemble E est une partie $\mathcal{R}$ de $E \times E$. Si un couple (x, y) est dans $\mathcal{R}$, on note souvent $x\mathcal{R}y$.
Définition 1.2
Les relations étants des parties de $E \times E$, on définit de manière usuelle le complémentaire $\rceil(\mathcal{R})$, la réunion $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ et l'intersection $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ de relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. On a:
• $(x, y) \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ si, et seulement si $x\mathcal{R}_1 y$ ou $x\mathcal{R}_2 y$.
• $(x, y) \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ si, et seulement si $x\mathcal{R}_1 y$ et $x\mathcal{R}_2 y$.
• $x\rceil(\mathcal{R})y$ si, et seulement si $(x, y) \notin \mathcal{R}$.
• On dit que $\mathcal{R}_1$ implique $\mathcal{R}_2$ (ce qui revient au même de dire que $\mathcal{R}_2$ contient $\mathcal{R}_1$) si, et seulement si $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$, c'est-à-dire si, et seulement si pour tout x et y de E, $x\mathcal{R}_1 y \Rightarrow x\mathcal{R}_2 y$.
Définition 1.3
La composition des relations sur E est l'opération sur $\mathcal{P}(E \times E)$ définie par:
$\forall \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathcal{P}(E\times E), \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 = \{(x, z) \in E \times E : \exists y \in E, (x, y) \in \mathcal{R}_2, (y, z) \in \mathcal{R}_1\}$.
La composition des relations est associative et admet comme élément neutre la relation identité $\mathcal{R}^0 = \{(x, x) \,/ x \in E\}$. Autrement dit, $(\mathcal{P}(E \times E), \circ, \mathcal{R}^0)$ est un monoïde.
Définition 1.5
Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est dite:
• Réflexive si $\mathcal{R}^0 \subseteq \mathcal{R}$, c'est-à-dire $x\mathcal{R}x$ pour tout $x \in E$.
• Antiréflexive si on a $\mathcal{R}^0 \cap \mathcal{R} = \emptyset$, c'est-à-dire il n'existe pas un élément $x \in E$ qui vérifie $x\mathcal{R}x$.
• Symétrique si on a $\mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{R}$, c'est-à-dire $y\mathcal{R}x$ dès que $x\mathcal{R}y$.
• Antisymétrique si $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}^0$, c'est-à-dire si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors $x = y$.
• Transitive si on a $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$, c'est-à-dire si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$.
Un ordre sur un ensemble E est une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive. Un ordre strict est une relation binaire antiréflexive et transitive. Un préordre est une relation binaire réflexive et transitive. Une équivalence est une relation binaire sur E qui est réflexive, symétrique et transitive.
Un ordre $\leq$ sur un ensemble E est total si il vérifie la propriété suivante: $\forall x, y \in E : x \leq y$ ou $y \leq x$. A une relation d'ordre $\leq$, on associe la relation d'ordre stricte $<$ définie par: $x < y \Longleftrightarrow x \leq y$ et $x \neq y$.
Définition 1.6
Soient E un ensemble non vide et p une propriété des relations vérifiée par $E \times E$. Si l'intersection de toute famille de relations vérifiant P est une relation qui vérifie P, alors il existe pour toute relation $\mathcal{R}$ une plus petite relation vérifiant P et contenant $\mathcal{R}$. On l'appelle la P-fermeture de $\mathcal{R}$. C'est le cas pour les propriétés de réflexivité, de symétrie, de transitivité et toutes les combinaisons de ces propriétés.
Notations 1.7
Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur un ensemble E. On dénote par :
• $E \times E$ la relation pleine.

- $\mathcal{R}^0$ l'identité sur E.
- $\mathcal{R}^n$ la n-ième composition de $\mathcal{R}, \mathcal{R}^n = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{n-1} = \mathcal{R}^{n-1} \circ \mathcal{R}$, pour $n > 0$.
- $\mathcal{R}^r$ la fermeture réflexive de $\mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}^{-1}$ l'inverse de $\mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}^s$ la fermeture symétrique de $\mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}^+$ ou $\mathcal{R}^t$ la fermeture transitive de $\mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}^*$ ou $\mathcal{R}^{rt}$ la fermeture réflexive et transitive de $\mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}^{rts}$ la fermeture réflexive, transitive et symétrique de $\mathcal{R}$.

Proposition 1.8

Soit p une propriété des relations vérifiéé par $E \times E$.

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E et soit P une propriété qui peut être vérifiée par $\mathcal{R}$ ou non. On cherche s'il existe une relation $\widetilde{\mathcal{R}}$ possédant la propriété P avec $\widetilde{\mathcal{R}}$ contient $\mathcal{R}$. On demande de plus que $\widetilde{\mathcal{R}}$ soit minimale, c'est-à-dire que s'il existe une autre relation $\widehat{\mathcal{R}}$ possèdant la propriété P on doit avoir:

$$\mathcal{R} \subseteq \widetilde{\mathcal{R}} \subseteq \widehat{\mathcal{R}},$$

En d'autres mots, la relation $\widetilde{\mathcal{R}}$ est la plus petite relation, au sens de l'inclusion, contenant $\mathcal{R}$ et possédant la propriété P.

- Par exemple, si la propriété P est la réflexivité, la symétrie ou la transitivité, La relation triviale $E \times E$ possède la propriété P et impliquée par toute relation $\mathcal{R}$. D'autre part, pour toute famille de relations $\widehat{\mathcal{R}}$ de $E \times E$ vérifiant la propriété P, on a bien la relation $\bigcap \widehat{\mathcal{R}}$ vérifie aussi cette propriété. Il en résulte que:

$$\widetilde{\mathcal{R}} = \bigcap_{\substack{\mathcal{R} \subseteq \widehat{\mathcal{R}} \\ \widehat{\mathcal{R}} \text{ vérifie } P}} \widehat{\mathcal{R}}$$

est la plus petite relation binaire contenat $\mathcal{R}$ est possédant la propriété P. On a les formules suivantes :

- Si P est la réflexivité, alors $\widetilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}^r = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^0$
- Si P est la symétrie, alors $\widetilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}^s = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$
- Si P est la transitivité, alors $\widetilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}^t = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{R}^n$

Théorème 1.9

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur un ensemble E. Il existe une unique relation d'équivalence $\widetilde{\mathcal{R}}$ telle que:

1. $\mathcal{R} \subseteq \widetilde{\mathcal{R}}$.

2. Si $\overset{\wedge}{\mathcal{R}}$ est une relation d'équivalence vérifiant $\mathcal{R} \subseteq \overset{\wedge}{\mathcal{R}} \subseteq \widetilde{\mathcal{R}}$, alors $\overset{\wedge}{\mathcal{R}} = \widetilde{\mathcal{R}}$.

3. Cette relation est définie par une des formules suivantes:

$$\widetilde{\mathcal{R}} = \bigcap_{\substack{\mathcal{R}\subseteq\overset{\wedge}{\mathcal{R}} \\ \overset{\wedge}{\mathcal{R}} \text{ relation d'équivalence}}} \qquad \overset{\wedge}{\mathcal{R}} = \mathcal{R}^0 \bigcup \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (\mathcal{R}\cup\mathcal{R}^{-1})^n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (\mathcal{R}\cup\mathcal{R}^{-1}\cup\mathcal{R}^0)^n.$$

Proposition 1.10

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur un ensemble E. On a

- $(\mathcal{R}^r)^s = (\mathcal{R}^s)^r$.
- $(\mathcal{R}^r)^t = (\mathcal{R}^t)^r$.
- $(\mathcal{R}^t)^s \subseteq (\mathcal{R}^s)^t$.

Proposition 1.11

Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur un ensemble E peut être définie aussi de plusieurs manières:

1. Par la donnée d'un partition $\mathcal{P}$ de E:

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists X \in \mathcal{P} \text{ tel que: } x \in X \text{ et } y \in X.$$

2. Par la donnée d'une application f de E dans un ensemble quelconque F:

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow f(x) = f(y).$$

3. Par la donnée d'une application h de $E\times E$ dans l'ensemble $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ vérifiant la condition:

$$\forall (x, y, z) \in E^3, h(x, y)h(y, z) = h(x, z).$$

en posant,

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow h(x, y) = 1.$$

2 Monoïde

Définition 2.1

Un monoïde est un ensemble muni d'une loi interne, i.e. d'une application $\cdot : M \times M \longrightarrow M$, qui satisfait aux conditions suivantes:

► L'opération Δ est associative: $\forall x, y, z \in M : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

► Il existe un neutre (unique) $1_M \in M$ tel que $\forall x \in M : x \cdot 1_M = 1_M \cdot x = x$.

Un élément $m' \in M$ est dit le symétique de l'élement $m \in M$ si $m \cdot m' = m' \cdot m = 1_M$.

Remarque 2.2

Un Monoïde $(M, \cdot, 1_M)$ qui est tel que tout élément de M possède un symétrique est un groupe.

Définitions 2.3

• Soit un monoïde $(M, \cdot, 1_M)$. Un sous monoïde de $(M, \cdot, 1_M)$ est un triplet $\left(M^{'}, \cdot, 1_M^{'}\right)$ tel que:

▶ $M^{'} \subseteq M$.

▶ $1_M = 1_M^{'}$.

▶ $\forall m, m^{'} \in M^{'} : m \cdot m^{'} \in M^{'}$.

• Soit I est un ensemble d'indices et si $\forall i \in I, (M_i, \cdot, 1_M)$ est un sous monoïde de $(M, \cdot, 1_M)$, alors $(\cap_{i \in I} M_i, \cdot, 1_M)$ est un sous monoïde de $(M, \cdot, 1_M)$.

• Soit Y une partie d'un monoïde M. On appelle sous monoïde engendré par Y, le plus petit sous monoïde de $(M, \cdot, 1_M)$ contenant Y, on le note Y^*. D'après ce qui précède Y^* est l'intersection de tous les monoïdes de (M, Δ, e) qui contiennent Y.

Définitions 2.4

Soit $(M, \cdot, 1_M)$ un monoïde , une congruence sur $(M, \cdot, 1_M)$ est une relation d'équivalence $\equiv$ stable par multiplication à droite et à gauche, c'est-a-dire:

$$\forall x, y, z \in M : x \equiv y \Rightarrow x \cdot z \equiv y \cdot z \text{ et } z \cdot x \equiv z \cdot y$$

Définition 2.5

Soit M un monoïde et $\equiv$ une congruence défine sur M. Le quotient $M/\equiv$ est le monoïde des classes de congruence de M pour la relation $\equiv$. La loi de composition de $M/\equiv$ est définie de la manière suivante: $\overline{u} *_{M/\equiv} \overline{v} = \overline{u *_M v}$.

La projection naturelle (la surjection canonique) de M dans $M/\equiv$ est noté P.

Définition 2.6

Soit $\equiv$ une congruence sur un monoïde M.

Une partie X de M est dite saturée par $\equiv$ si $\forall x \in X : \overline{x} \subseteq X$.