CAPACITE D'UNE LIGNE ELECTRIQUE

La capacité d'une ligne électrique est le résultat de la différence de potentielle entre les conducteurs, ou bien entre les conducteurs et le sol. La capacité entre des conducteurs parallèles dépend de la taille et de l'espace entre les conducteurs (rayon et disposition géométrique des conducteurs).

Tout point de l'espace est caractérisé par le vecteur champ électrique $\vec{E}$ qui dérive du potentiel scalaire V tel que

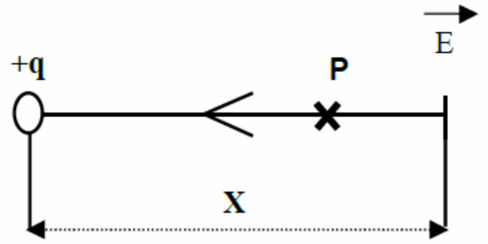
$$\vec{E} = -\vec{grad}V = -\frac{dV}{dr}$$

Ce champ permet de déterminer la force d'interaction sur une charge q tel que

$$\vec{F} = q.\vec{E}$$

POTENTIEL D'UNE CHARGE PONCTUELLE

Soit V le travail effectué pour ramener une charge positive 1C de l'infini vers un point P.



Puisque

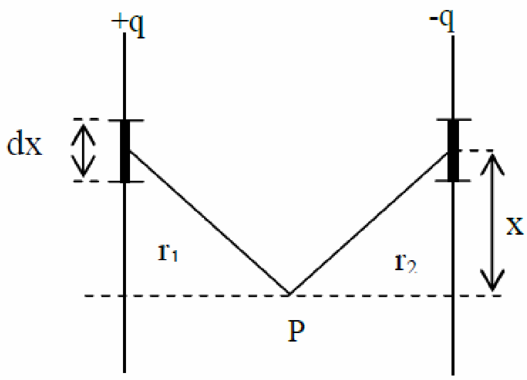
$$\vec{E} = -\vec{grad}V, \text{alors}, V = -\int_{\infty} E.dx, \text{et}, E = \frac{q}{4.\pi.\varepsilon_0.x^2}$$

Avec V (∞)=0 potentiel colombien

$$V = \frac{-.q}{4\pi.\varepsilon_0}\int_{\infty}^{x}\frac{dx}{x^2} = \frac{-.q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\infty}^{x} = \frac{q}{4.\pi.\varepsilon_0.x}, (\text{Volts})$$

CAPACITE D'UNE LIGNE MONOPHASE

Considérons deux conducteurs finis de longueur L chargés respectivement de +q et de -q C/m.



Les distances entre les éléments et le point P sont respectivement

$$\sqrt{x^2 + r_1^2}, \text{ et } \sqrt{x^2 + r_2^2}$$

Le potentiel V_P obtenu par superposition sera sur toute la longueur 2L

$$V_P = \int_{-L}^{L} \frac{q.dx}{4.\pi\varepsilon_0.\sqrt{x^2 + r_1^2}} + \int_{-L}^{L} \frac{-qdx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + r_2^2}}$$

Autrement dit

$$V_P = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}.\ln\left[\frac{(L + \sqrt{L^2 + r_1^2})(-L + \sqrt{L^2 + r_2^2})}{(L + \sqrt{L^2 + r_2^2})(-L + \sqrt{L^2 + r_1^2})}\right]$$

$$\text{Si, } L \to \infty, \quad \frac{L + \sqrt{L^2 + r_1^2}}{L + \sqrt{L^2 + r_2^2}} \to \infty$$

Par contre, $\dfrac{-L + \sqrt{L^2 + r_2^2}}{-L + \sqrt{L^2 + r_1^2}}$ sera indéterminé

Afin d'éviter cette indétermination, on développe

$$\frac{-L + \sqrt{L^2 + r_2^2}}{-L + \sqrt{L^2 + r_1^2}} = \frac{-1 + \left[1 + (r_2 / L)^2\right]^{1/2}}{-1 + \left[1 + (r_1 / L)^2\right]^{1/2}} = \frac{-1 + \left[1 + 1/2(r_2 / L)^2 + ...\right]}{-1 + \left[1 + 1/2(r_1 / L)^2 + ...\right]}$$

$$= \frac{1/2.(r_2 / L)^2}{1/2.(r_1 / L)^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$, alors on aura

$$V_P = \frac{Q}{4.\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{r_2}{r_1})^2 = \frac{Q}{2.\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}, \text{Volts}$$

Le rapport (r_2 / r_1)=constante représente les surfaces équipotentielles (V_P= ct^e)

Le rapport (r_2 / r_1) peut être aussi grand ou petit selon r_2 et r_1 .En effet si P se trouve très proche de la ligne +q, le rapport r_2 / r_1 est grand c'est à dire que $r_2 \to D$ et $r_2 / r_1 \cong D/r_1$, donc V_P dépend approximativement de r_1 et de la surface équipotentielle adjacente au conducteur (+q) concentrique.

Le potentiel V_1 sur le cylindre de rayon r_1 sera

$$V_1 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D}{r_1}$$

De même que si r_2 / r_1 est petit c'est à dire que $r_1 \to D$, le potentiel V_2 sur le cylindre de rayon r_2 sera

$$V_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{D}$$

La différence de potentielle entre les deux conducteurs

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}(\ln\frac{D}{r_1} - \ln\frac{r_2}{D}) = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0}(\ln\frac{D}{\sqrt{r_1.r_2}})$$

Si $r_1=r_2=r$ alors $V_1 - V_2 = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D}{r}$

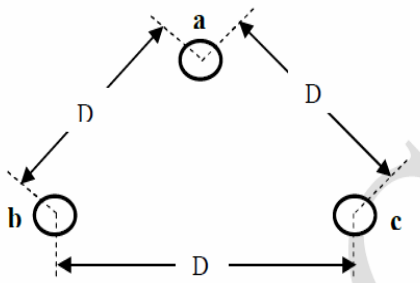
Puisque la capacité est le résultat de la différence de potentielle entre les deux conducteurs c'est à dire

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

$$C = \frac{\pi.\varepsilon_0}{\ln D/R}, F/m$$

CAPACITE D'UNE LIGNE TRPHASE SYMETRIQUE

Les trois conducteurs sont disposés en triangle équilatéral



La différence de potentielle V_{ab} due aux charges des conducteurs a et b peut s'écrire

$$V_{ab} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}(q_a \ln\frac{D}{r} + q_b \ln\frac{r}{D}) \quad (v)$$

L'effet de la charge q_c du conducteur c peut être introduit en supposons que la charge q/m est équivalente à une charge ponctuelle q_c concentrée au centre du conducteur. C'est à dire que V_{ab} due à q_c sera

$$V_{ab} = \frac{q_c}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D}{D} = 0.\text{volts}$$

Seulement pour considérer les trois charges nous écrivons

$$V_{ab} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}(q_a \ln\frac{D}{r} + q_b \ln\frac{r}{D} + q_c \ln\frac{D}{D})$$

$$V_{ac} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}(q_a \ln\frac{D}{r} + q_b \ln\frac{D}{D} + q_c \ln\frac{r}{D})$$

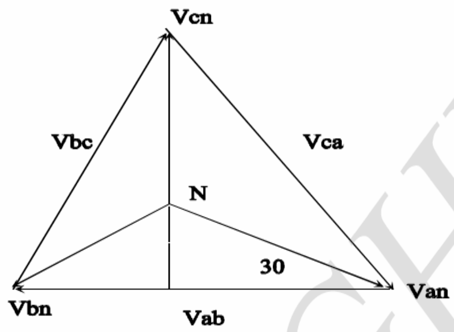
$$V_{ab} + V_{ac} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left[2q_a \ln\frac{D}{r} + (q_b + q_c)\ln\frac{r}{D}\right]$$

Puisque les tensions sont supposées sinusoïdales, les charges seront aussi sinusoïdales. Toutefois s'il n'y a pas de charges dans leur environnement, la somme

$$\sum_{i=1}^{3} q_i = 0 \text{ , alors } q_a + q_b + q_c = 0$$

$$V_{ab} + V_{ac} = \frac{3.q_a}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{D}{r}$$

Si nous exprimons V_{ab} et V_{ac} en fonction de V_{an}, tension pa



Le module de la tension V_{ab} est exprimé par

$$|V_{ab}| = 2|V_{an}|.\cos 30 = \sqrt{3}.|V_{an}|$$

$$V_{ab} = \sqrt{3}.V_{an}\angle 30 = \sqrt{3}V_{an}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right)$$

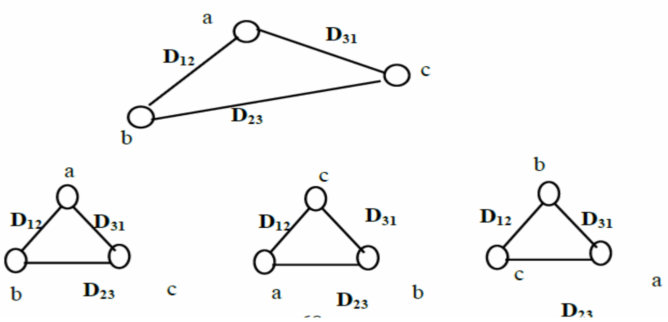
$$V_{ac} = -V_{ca} = \sqrt{3}V_{an}\angle -30 = \sqrt{3}V_{an}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right)$$

$$V_{ab} + V_{ac} = 3.V_{an}\text{, et,} 3.V_{an} = \frac{3.q_a}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D}{r}$$

$$C_N = \frac{q_a}{V_{an}} = \frac{2.\pi\varepsilon_0}{\ln D/r}, (F/m)$$

CAPACITE D'UNE LIGNE TRIPHASE NON SYMETRIQUE

Une ligne triphasé non symétrique est une ligne dont les distances entre conducteurs ne sor pas égales tel que:



Cependant pour une ligne non transposée, les capacités entre conducteurs et le neutre ne sont pas égales. La capacité moyenne de n'importe quelle phase par rapport au neutre est la même que la capacité moyenne par rapport au neutre de chacune des autres phases, pour une transposition complète de la ligne, Puisque chaque conducteur de phase occupe la même position que les autres conducteurs de phases sur une distance égale le long du cycle de transposition.

La dissymétrie d'une ligne non transposée est généralement faible par rapport aux configurations habituelles. A cet effet, la capacité est déterminée comme si la ligne est transposée. Dans ce cas nous pouvons déterminer la tension dans les trois positions:

$$(V_{ab})_1 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}(q_a \ln\frac{D_{12}}{r} + q_b \ln\frac{r}{D_{12}} + q_c \ln\frac{D_{23}}{D_{31}})$$

$$(V_{ab})_2 = \frac{1}{2\pi._0}(q_a \ln\frac{D_{23}}{r} + q_b \ln\frac{r}{D_{23}} + q_c \ln\frac{D_{23}}{D_{31}})$$

$$(V_{ab})_3 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}(q_a \ln\frac{D_{31}}{r} + q_b \ln\frac{r}{D_{31}} + q_c \ln\frac{D_{12}}{D_{23}})$$

La tension moyenne de V_{ab} sera

$$V_{ab} = \frac{(V_{ab})_1 + (V_{ab})_2 + (V_{ab})_3}{3}$$

$$V_{ab} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0}(q_a \ln\frac{D_{12}.D_{23}.D_{31}}{r^3} + q_b \ln\frac{r^3}{D_{12}.D_{23}.D_{31}} + q_c \ln\frac{D_{12}.D_{23}.D_{31}}{D_{12}.D_{23}.D_{31}})$$

$$V_{ab} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}(q_a \ln\frac{D_m}{r} + q_b \ln\frac{r}{D_m})$$

Avec, $D_m = \sqrt[3]{D_{12}.D_{23}.D_{31}}$

De la même manière on a:

$$V_{ac} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}(q_a \ln\frac{D_m}{r} + q_c \ln\frac{r}{D_m})$$

$$V_{ab} + V_{av} = 3V_{an} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}(2q_a \ln\frac{D_m}{r} + q_b \ln\frac{r}{D_m} + q_c \ln\frac{r}{D_m})$$

Comme: $q_a + q_b + q_c = 0$

$$3V_{an} = \frac{3.}{2\pi\varepsilon_0} q_a \ln\frac{D_m}{r}$$

Alors dans ce cas : $C_N = \frac{q_a}{V_{an}} = \frac{2.\pi\varepsilon_0}{\ln D_m / r}, (F/m)$

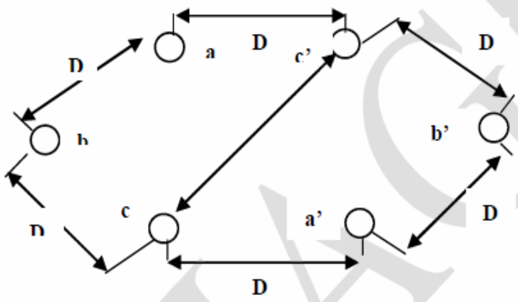
CAPACITE D'UNE LIGNE TRIPHASE A DOUBLE CIRCUIT

Généralement dans le cas des lignes à double circuit deux configurations possibles sont rencontrées pratiquement.

- La configuration hexagonale
- La configuration disposée dans un plan vertical

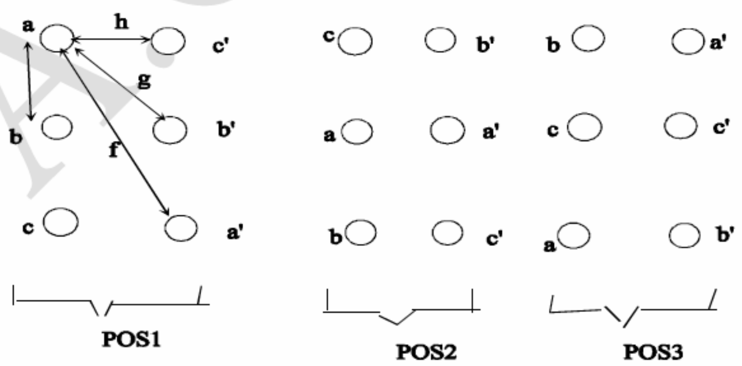
CONFIGURATION HEXAGONALE

La disposition géométrique d'une telle configuration peut être représentée selon la figure ci-dessous



$$C = \frac{4.\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{\sqrt{3}.D}{2r}}, F/m/Phase$$

CONFIGURATION DISPOSEE DANS UN PLAN VERTICAL



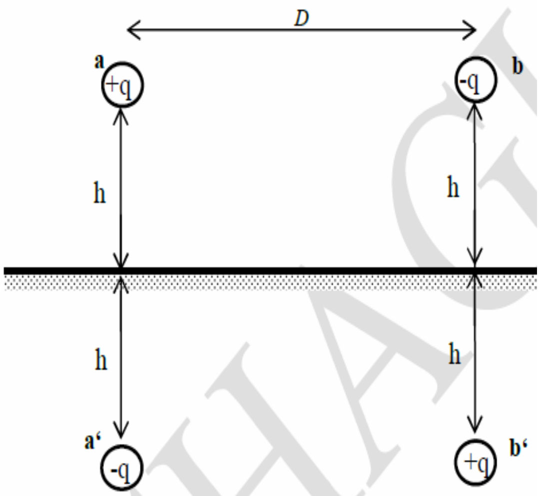
$$C = \frac{q_a}{V_a} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{\sqrt[3]{2}.d}{r}(\frac{g}{f})^{2/3}}, F/m/conducteur$$

La capacité par phase du système $C = \frac{4.\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{\sqrt[3]{2}.d}{r}(\frac{g}{f})^{2/3}}$ F/m/Phase

INFLUENCE DE LA TERRE SUR LA CAPACITE

INFLUENCE DE LA TERRE SUR LA CAPACITE D'UNE LIGNE MONOPHASE

Le potentiel V_a du conducteur a par rapport à un point P se trouvant à une distance très grande du système (c'est à dire $V_P \cong 0$) sera



$$V_a = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{D_a}{r} - \ln\frac{D_{a'}}{D_{a.a'}} - \ln\frac{D_b}{D_{a.b}} + \ln\frac{D_{b'}}{D_{a.b'}}\right)$$

$$D_{a.b'} = D_{a'.b} = \sqrt{D^2 + (2h)^2}$$

$$V_a = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D_{a.b}}{r}.\frac{D_{a.a'}}{D_{a.b'}} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D_{a.b}}{r}.\frac{2h}{D_{a.b'}}$$

$$V_a = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D}{r}.\frac{2h}{\sqrt{D^2+(2h)^2}}$$

Donc la capacité $C = \frac{q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{D}{r}.\frac{2h}{\sqrt{D^2+(2h)^2}}}, F/m$

Comme le rapport $\frac{D_{a.a'}}{D_{a.b'}} = \frac{2h}{\sqrt{D^2+(2h)^2}} \langle 1$

Donc l'influence du sol tend à augmenter la capacité du système.

Cependant la distance de séparation D entre les deux conducteurs est normalement faible devant la hauteur des conducteurs par rapport au sol par conséquent $\frac{D_{a.a'}}{D_{a.b'}} = \frac{2h}{\sqrt{D^2+(2h)^2}} \cong 1$ et pour des raisons pratiques l'effet de la terre peut être négligé.